للفكرة الطلابية التي كانت و ستبقى كباقي الأفكار شيئا لا يموت

بل يحيي كل أرض جرداء تقله

كتلة العودة الطلابية

إلى كل شبابها في Power Unit

و لنا ما تبقى من آثار السهر و العمل و الحلم

لكم ما عملنا و لنا ما حصدتم

سهل الله به لكم طريقا إلى الجنة

تمت بحب

Chapter 1

[Systems of Linear Equations and Matrices]

→ Covered Topics :

- Introduction to Systems of Linear Equations
- Gaussian Elimination
- Matrices and Matrix Operations
- Inverses; Algebraic Properties of Matrices
- Elementary Matrices and a Method for Finding Inverse
- More on Linear Systems and Invertible Matrices
- Diagonal,Triangular, and Symmetric Matrices

Introduction to Systems of Linear Equations

- When you have the matrix A, then you can determine the location of entries using symbol (i) to determine the row, and (j) to determine the column, so when you are talking about matrix A, definitely the entry a_{12} , then this entry is located at the first row, second column.

  - **Example:**

    If A is 3×4 matrix denoted by $A = 2i - j^2$, then find A.

    - According to the note above and applying the changes on entries as mentioned in the equation

    as you can say : $a_{12} = 2 \times 1 - 2^2 = -2$.

    Then A is : $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 & -14 \\ 3 & 0 & -5 & -12 \\ 5 & 2 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

- **What you should basically figure about matrices :**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 & -14 \\ 3 & 0 & -5 & -12 \\ 5 & 2 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

→This matrix is taken from this couple of equations :

X + -2Y + -7Z = -14

3X + -5 Y = -12

$5X + 2Y + -3Z = -10$

→ It has three rows and four columns, then we say the size of the matrix is 3×4, as mentioned in the question.

- ## Types Of Matrices :

→ **Square Matrices** :

$A_{n\times n}$ matrix → [number of rows = number of columns] , like : A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

→ **Diagonal Matrices :**

$A_{n\times n}$ is a diagonal matrix if and only if $a_{ij} = 0$, for $i \neq j$.

- هذا النوع خاص بالمصفوفات المربعة فقط، و تكون جميع المدخلات التي لا تساوي صفرا موجودة في قطر المصفوفة.

Like A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, & you can consider this matrix diagonal too :

B = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

→ **Triangular Matrices :**

➢ **Upper Triangular Matrix :**

B is upper triangular matrix if and only if $a_{ij} = 0$, for $i > j$.

Like : $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 98 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- هذا النوع خاص بالمصفوفات المربعة فقط، و تكون جميع المدخلات التي لا تساوي صفرا موجودة فوق قطر المصفوفة.

➢ **Lower Triangular Matrix :**

B is lower triangular matrix if and only if $a_{ij} = 0$, for $i < j$.

Like : $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 34 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

- هذا النوع خاص بالمصفوفات المربعة فقط، و تكون جميع المدخلات التي لا تساوي صفرا موجودة اسفل قطر المصفوفة.

→ **Symmetric Matrices & Skew Symmetric Matrices :**

- This type of matrices is based on an operation called the transpose.
- To do the transpose you should interchange the places of entries as the way done here :

If $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 34 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ then B transpose = $B^t = \begin{bmatrix} 3 & 34 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- اللي عملناه انه جبنا العمود الأخير، عملناه الصف الأخير بنفس ترتيب مدخلاته، نفس العملية طبقناها على العمود اللي قبله بالترتيب، العمود الثاني، حطيناه مكان الصف الثاني، و بنكمل بهاي الطريقة مع كل الاعمدة و الصفوف **و لجميع أنواع المصفوفات سواء كان مصفوفات مربعة أو لا.**
- لما نعمل ال transpose بينعكس حجم المصفوفة ، يعني عدد صفوفها الجديد بصير عدد اعمدتها السابق ، و عدد اعمدتها الجديد بساوي عدد صفوفها السابق ، اذا في حالة كانت المصفوفة مربعة زي في المثال ، قبل ال transpose بكون حجمها 3×3 ، و بعد ما نعمله بضل حجمها 3×3 لانه عدد الصفوف بساوي الاعمدة بالأساس ، لكن لو مصفوفة حجمها 3×2 بعد ال transpose بصير حجمها 2×3.

➢ Symmetric Matrices :

A is symmetric matrix if ($A = A^t$) or ($a_{ij} = a_{ji}$)

Like $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

➢ Skew Symmetric Matrices :

A is said to be skew symmetric matrix if ($A = -A^t$)

Like $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

→ Identity Matrix :

A square matrix, has a couple of properties and a special usage, & will be explained later with the **TOPIC : Gaussian Elimination.**

• Matrices and Matrix Operations

• Simple operations to apply on matrices :

→ Addition & Subtraction, Transpose & Trace, and Multiplication :

- **Example:**

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ then find :

(1) 2A (2) A-B (3) A^t

(1) Multiplying by a constant (multiply each element by the constant) :

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) Normal Subtraction :

$$A\text{-}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

– **هام بالنسبة للطرح و الجمع** : يجب أن تكون المصفوفات المجموعة و المطروحة بنفس الحجم ، كشرط أساسي لتمام هذه العملية.

(3) Transpose as mentioned above :

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$ **NOTE** → the new size of A is 3×2.

(4) Trace: it is an operation only used for square matrices by adding elements of the diagonal to each other :

- **Example :** find the trace of matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Solution : trace(A)= 3 + 4 + 7 = 14.

- **Multiplying two matrices :**

- **ملاحظات على عملية الضرب** :

✓ مش شرط إنك تضرب مصفوفات متساوية بالحجم تماما ، ممكن تضرب مصفوفات مختلفة الحجم و لكن هون في شرطين مهمات ، الأول إنك تراعي الترتيب ، الثاني إنه لازم يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوي لعدد صفوف المصفوفة الثانية .

✓ بمعنى إنه A × B مختلفة عن B × A ، و أفاجأك إنه ممكن الأولى تحقق الشرط و تزبط و ممكن التانية لا الشرط اللي هو إنه لازم عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية .

○ **Example :**

Let A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ and B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ find (if possible)

- A × B
- B × A

Solution :

(1) For A × B , the size of A is (2×2) and size of B is (2×3)

number of A columns = 2 = number of B rows

✓ Valid multiplication.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 11 & 13 & 26 \end{bmatrix}$$

✓ Note that the resulting matrix has the size (2×3).

✓ It took the number of A rows as its own number of rows & the number of B columns as its own number of columns.

✓ For this result we should take care of the validation condition of multiplication that is mentioned above .

(number of A columns = 2 = number of B rows)

(2) For $B \times A$, the size of B is (2×3) and size of A is (2×2)

number of B columns ≠ number of A rows .

✓ Invalid multiplication.

- **Example :**

Let A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ & C = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ find AC if valid .

number of A columns = 3 = number of C rows .

✓ Valid multiplication.

AC = $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 18 & 3 \end{bmatrix}$

- Solving Matrices

[هذا السكشن قائم على حل المصفوفات باستخدام ما يسمى ال <u>Row Operations</u> و في ما يلي التفصيل لكل مواضيع هذا السكشن]

To solve a matrix you should use the row operations :

- Multiplying any row by nonzero scalar
- Interchange the position of one row by another
- Adding a multiply of one row to another

○ Solve the next system of linear equations :

x + y + 2z = 9

2x + 4y -3z = 1

3x + 6y -5z = 0

Solu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -1 & -27 \end{bmatrix} \quad -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \;\; \& \; -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -22 & -54 \end{bmatrix} \quad 2R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad -3R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

- ✓ Now we are done from working with the matrix .
- ✓ Backward substitution implementation :

$-1z = -3 \rightarrow z = 3$

$2y - 7z = -17 \rightarrow y = 2$

$x + y + 2z = 9 \rightarrow x = 1$

- **نحكي شوية حكي ع جنب مشان نفهم شو صار :**

أنا اشتغلت بطريقة انه أحصر معامل آخر حد مع الحد الثابت بس في المصفوفة مشان أقدر أطلع قيم المتغيرات عن طريق التعويض ، و كل هاد عملته لأني صفرت الزاوية اليسار و اشتغلت عليها بشكل رئيسي .

بس لازم أسأل سؤالين :

- بقدر أطلع المصفوفة بشكل أرتب يسهل علي التعامل مع المعاملات ؟!
- بقدر أضل اشتغل ع المصفوفة لحد ما أطلع قيم المتغيرات بدون تعويض عكسي ؟!

جواب السؤالين هو : نعم ، طبعا بتقدر

- للسؤال الأول احنا بنستخدم تقنية في حل المصفوفات اسمها **Gaussian Elimination**
- للسؤال الثاني احنا بنسخدم تقنية للحل بنسميها **Jordan-Gauss Elimination**

ضروري نكون حاطين في بالنا ملاحظتين :

- الطريقتين هدول هم امتداد للطريقة اللي استخدمناها فوق ، يعني عشان نطبقهم بدنا نضيف على حلنا فوق اكمن خطوة

- الطريقة الثانية : **Jordan-Gauss Elimination** قليل ما بنستخدمها في حل المصفوفات بشكل مباشر ، أكثر شي بنستخدمها لما نحل أسئلة متقدمة أو الها علاقة بالخصائص(راح ناخدها لقدام) ، لأنها أحيانا إذا كانت المصفوفة معقدة بكون استخدامها صعب جدا .

Gaussian Elimination Implementation :

رح نكمل حل ع المصفوفة اللي اشتغلنا عليها بالمثال الماضي ، بدء تنفيذ هاي الطريقة ببلش من عند اخر خطوة بالمثال الماضي ، الى ان نتهي من الحل كالآتي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

شو لازم اعمل عشان انفذ الطريقة ؟

- بنطلع ع الصفوف ، في كل صف ، اول رقم بعد الصفر بدنا نحوله لرقم (1) فيما يعرف بال Leading One
- المدخلات المقصودة هي اللي عليها اسهم ، و بطبق على المصفوفة عمليات زي المرة الأولى عادي

  - **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad R_2 \div 2 \longrightarrow R_2 \ \& \ R_3 \div -1 \longrightarrow R_3$$

- شايفين ال **Leading ones** اللي طلعوا معنا ؟! هدول ح يكونوا رفاقنا المميزين في ال **Gaussian Elimination**
- شكل المصفوف النهائي اللي بطلع معنا بعد هاد الحل بنسميه **Row Echelon Form (REF)** و بعد ما نخلص الحل كاملا راح نشرح اكثر عن هالشكل .

Jordan-Gauss Implementation :

برضو راح نكمل من عند آخر خطوة في ال **Gaussian Elimination**

شو لازم أعمل عشان انفذ الطريقة ؟!

- نلاحظ إنه راح يكون في **Leading ones** موجودين ، و اللي راح نعمله إنه نصفر الأرقام اللي فوقهم .
(كل عمود فيه **Leading ones** بدي أصفر كل الأرقام اللي فيه بالاستعانة بال **Leading ones** نفسهم
- بالنهاية رقم (1) راح يساعدني أتم هاي العملية لأنه سهل نضربه بأي رقم
- عشان هيك اذا بدي انفذ هاي الطريقة لازم يكون في عندي **Leading ones** إجباري
(بنلاحظ هون انه طريقة ال **Gaussian Elimination** وال **Jordan-Gauss Elimination** مكملين لبعض)

○ **Solution:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad -2R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \; \& \; 7R_3 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad -R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

- لما ننهي الحل باستخدام هاي الطريقة بنكون وصلنا المصفوفة للشكل اللي بنسميه :

✓ Reduced Row Echelon Form (RREF)

✓ Also called the Augmented Matrix

- **To summarize :**

ROW ECHELON FORM (REF)	REDUCED ROW ECHELON FORM (RREF)

Obtained by Gaussian Elimination	Obtained by Jordan-Gauss Elimination
If a row does not consist entirely of zeros , then the first nonzero number is 1(Leading One)	If a row does not consist entirely of zeros , then the first nonzero number is 1(Leading One)
If there are any rows that consists entirely of zeros , then they are grouped together at the bottom of the matrix	If there are any rows that consists entirely of zeros , then they are grouped together at the bottom of the matrix
In any two successive rows that do not consist entirely of zeros , the leading one in the lower row occurs further to the right than the leading one in the higher row	In any two successive rows that do not consist entirely of zeros , the leading one in the lower row occurs further to the right than the leading one in the higher row
------	Each column that contains a leading one has zeros every where else in that column

✓ **Note that** : the two forms has the same first three properties except the last one .

✓ **Leading ones notes :**

1- Positions of leading ones in row echelon form are called (pivot positions).

2- A column that contains a pivot position is called a pivot column , and it's same with rows.

هيك بنكون حكينا كيف بنحل المصفوفات عامة ، صار دور نحكي شو نوع الحلول اللي ممكن تطلع معنا:

✓ مصفوفة لها حل واحد exactly one solution

- ✓ مصفوفة لها عدد لا نهائي من الحلول infinite many solutions
- ✓ مصفوفة لا حل لها inconsistent

- كل نوع من أنواع هاي الحلول الثلاثة بتميز بصفات محددة راح تساعدنا بحل الأسئلة العكسية
- قبل هيك حلينا مثال على النوع الأول ، ضل نحل على النوعين اللي ضايلين مشان نعرف طريقة حلهم و نحل السؤال العكسي مشان نفهم الفروقات بينهم .

- **<u>The system with infinite many solutions :</u>**

  - **<u>Example :</u>**

    Solve the following system :

    $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$

    $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$

    $4x_4 = 4$

    $x_3 + x_5 = 3$

Solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ by implementing Gauss Elimination

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ this matrix will result

You can stop here and continue the substitution , or you have the choice to continue the solution with Jordan-Gauss Elimination

- Continuing the solution with [Jordan-Gauss]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -R_3 + R_1 \rightarrow R_1$$

The substitution :

$\mathbf{x_4 = 1}$

$x_3 + x_5 = 3 \rightarrow$ suppose $\mathbf{x_5 = T}$, T € R

$\mathbf{x_3 = 3 - T}$

$x_1 + x_2 = -2 \rightarrow$ suppose $\mathbf{x_2 = S}$, S € R

$\mathbf{x_1 = -2 - S}$

The solution { -2 –S , S , 3-T , 1 , T }

- اللي صار بالحل فوق ، و اللي هو سر إنه الناتج هون عدد لا نهائي من الحلول ، إنه ضل عندي مجهولين $\mathbf{x_2}$ و $\mathbf{x_5}$ ، ما بقدر أحصرهم بقيمة محددة ، ففرضت انهم متغيرات قد تحتمل عدد لانهائي من الاحتمالات ، شرط انتماءهم للأعداد الحقيقية.
- **الصفة المميزة لهذا النوع من الحلول :**

  آخر صف فيها بتصفر تماما .

ملاحظات :

- في الأسئلة اللي فيها عدد لا نهائي من الحلول عنا نوعين من المتغيرات : leading variables , & free variables

– ال leading هم المتغيرات اللي مع التعويض بكون الها قيمة محددة مثل: x_1 و x_2

– ال free هم المتغيرات اللي بضطر افرضهم قيم غير محددة تنتمي لمجموعة الأعداد الحقيقية مثل : x_3

- **The system with no solution :**

  - **Example :**

    solve the following system

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$

Solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \text{-}R_1 + R_2 \to R_2 \ \& \ \text{-}2R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \text{-}2R_2 + R_3 \to R_3 \leftarrow$$

OOPS!! the system has no solution because of the following :

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 =? \text{-}9$

$0 \neq \text{-}9 \to$ for this (the last row substitution) the matrix has wrong mathematic expression , then it has no solution.

- **Reverse questions :**

  - **Example :**

You have the following linear system :

X + 2y -3z = 4

3x –y + 5z = 2

4x + y + (a^2 - 14)z = a+2

Determine the values of "a" , for which the system has no solution , exactly one solution or infinite many solutions ?

Solution:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & (a^2 - 14) & a+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & (a^2 - 2) & a-14 \end{bmatrix}$$ -3R$_1$ + R$_2$ $\rightarrow$ R$_2$ & -4R$_1$ + R$_3$ $\rightarrow$ R$_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & (a^2 - 16) & a-4 \end{bmatrix}$$ -R$_2$ + R$_3$ $\rightarrow$ R$_3$

(a-4) (a+4)

– When the system has no solution .

(a-4)(a+4)z = a -4

Try a = -4

0z =? -8

0z $\neq$ -8 then it has no solution if a = -4

- When the system has infinite many solutions :

  $(a-4)(a+4)z = a -4$

  Try $a =4$

  $0z = 0$ (it'll make the last row full of zeros)

- Then if $a \neq 4$ and $a \neq -4$, the system has exactly one solution .

  ✓ **Note that :** we are depending on the last row in defining the situation , because the substitution starts from there.

- **Special study : The Homogenous System :**

The definition :

A system is said to be homogeneous if the constant terms are all zeros .

ملاحظة :

هاد النظام دائما محلول بكل حالاته ، و حلوله تنقسم إلى قسمين :

- قد يكون له حل وحيد (exactly one solution) و يسمى (the trivial solution)

  و في هذا الحل تكون قيمة جميع المتغيرات صفر .

- قد يكون له عدد لا نهائي من الحلول ، و هاد النوع من الحلول يسمى(the nontrivial solution)

- حتى نحدد قبل الحل اذا الحل ح يكون trivial او nontrivial بنشوف عدد المتغيرات و عدد المعادلات

  اذا عدد المتغيرات في النظام اكبر من عدد المعادلات بكون النظام اله عدد لانهائي من الحلول : nontrivial

○ **Example :**

Solve the following system :

$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$

$-x_1 + -x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$

$x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$

$x_3 + x_4 + x_5 = 0$

لاحظ انه الحد الثابت في جميع المعادلات هو صفر ، و هاي هي الصفة المميزة لهذا النظام

Homogeneous

قبل ما نبلش حل !!

انتبهت هون انه عدد المتغيرات ، أكبر من عدد المعادلات ؟!

اذا قطعا النظام راح يكون اله عدد لانهائي من الحلول .

Solution :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \ \& \ -2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_2 \leftrightarrow R_4 \ \& \ R_3 \div 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} -R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \ \& \ R_4 \div -3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_3 + R_4 \rightarrow R_4 \ \& \ -1\times R_3$$

Substitution :

$x_4 = 0$, then $x_3 + x_4 + x_5 = 0 \longrightarrow x_3 + x_5 = 0$

assume that $x_5 = T \longrightarrow T \in R$, then $x_3 = -T$

assume that $x_2 = S \longrightarrow S \in R$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$, $x_1 = -S + -2T + T$, $x_1 = -T - S$

• Manage Properties , & Special Ideas :

(1) The matrix containing one column is called **column matrix** or **column vector.**

(2) The matrix containing one row is called **row matrix** or **matrix vector .**

(3) Let A , B , C, and a, b, c, be three matrices and three constants :

$\rightarrow A + B = B + A$ (Addition is commutative).

$\rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$ (Addition is associative)

$\rightarrow A(B \pm C) = AB \pm AC$

$\rightarrow a(A \pm B) = aA \pm aB$

$\rightarrow (ab)C = a(bC)$

$\rightarrow (AB)c = A(Bc)$

➢ Special : properties of transpose :

$\rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$

$\rightarrow (kA)^t = kA^t$

$\rightarrow (A^t)^t = A$

$\rightarrow (AB)^t = A^t + B^t$

!! ATTENTION (1) : multiplication is not commutative.

!! ATTENTION (2) : cancelation law does not hold for matrices

But what does this mean with ?!

$\rightarrow$ Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, but $B \neq C$.

$\rightarrow$ AB = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, but A $\neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. , B $\neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

• Inverse , Elementary , & Identity Matrices :

✓ **Zero matrix :** [All entries are zero]

Example : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

!!ATTENTION(1) : A + (-A) = 0 **,** and (0) means zero matrix.

!!ATTENTION(2) : A + 0 = A , and (0) means zero matrix.

✓ **Identity matrix :**

It is a n×n matrix (square matrix) , denoted by $\mathbf{I_n}$ or **I** , and it has the same effect of number (1) in multiplication $\rightarrow$ IA = AI = A

And you suppose it has the size (3×3) , it will have this shape : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$Note that the main diagonal is full of zeros.

$\rightarrow$It will help in finding inverse.

❖ Inverse of the matrix :

Let A be a square matrix , if there exist a matrix B such that AB = BA = I , then we say A is invertible and B is called the inverse of A denoted by (A^{-1} = B) .

$\rightarrow$The matrix with zero row or zero column is singular (has no inverse)

- ✓ How to find Inverse ?

- ✓ **Approach (1) :**

If A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, and A is invertible , then

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

- Example :

Find A^{-1} where A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

Solu:

$A^{-1} = \frac{-1}{43}\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

!!ATTENTION: if you are asked to check whether your answer is correct or not

→use : $A(A^{-1}) = I$

- ✓ **Approach (2) :**

We will use the Identity matrix here , putting the matrix itself on the left , and its Identity on the right , gathering them in the same braces .Then we will implement Jordan-Gauss elimination to the whole big matrix till we reach the reduced row echelon form of the original matrix on the left , and if you check the other side on right you will find the Identity matrix replaced with the Inverse .

→To figure how it really works check the next example.

○ Example :

Let A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, find A^{-1} if exists.

Solu:

Left Matrix A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Right Identity

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5\backslash 3 & | & 2\backslash 3 & -1\backslash 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7\backslash 3 & | & -1\backslash 3 & 2\backslash 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5\backslash 3 & | & 2\backslash 3 & -1\backslash 3 & 0 \\ 0 & 0 & -31\backslash 3 & | & 7\backslash 3 & -8\backslash 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7\backslash 3 & | & -1\backslash 3 & 2\backslash 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5\backslash 3 & | & 2\backslash 3 & -1\backslash 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7\backslash 31 & 8\backslash 31 & -3\backslash 31 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18\backslash 93 & 6\backslash 93 & 21\backslash 93 \\ 0 & 1 & 0 & 27\backslash 93 & 9\backslash 93 & -15\backslash 93 \\ 0 & 0 & 1 & -7\backslash 31 & 8\backslash 31 & -3\backslash 31 \end{array}\right]$$

Identity

Inverse of A

Then $A^{-1} = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 9 & 3 & -5 \\ -7 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

→ When to use approach 1 , and when to use approach 2 ?

(1) Approach 1 is only valid for 2×2 matrices.

(2) Approach 2 is valid for all matrices.

→ We will learn another ways of finding inverse in chapter 2 (Determinants) , but for now , if you have more than one option for finding inverse , keep sure you will use the way with the least complexity , depending on the numbers inside the matrix and how much it is hard to solve.

➢ Properties for Inverse

→$(A^{-1})^{-1} = A$

→$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

→$(kA^{-1}) = \frac{1}{k}A^{-1}$ [k is a scalar]

→$(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

→If A is invertible , then A^t is invertible with $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

- انتبهتوا انه في السؤال حكالكم أوجدوا المعكوس اذا هو موجود ؟ طيب كيف اميز اذا هو موجود أو لا ؟

✓ اذا و انت بتحل طلع اخر صف معك مصفر كامل جهة المصفوفة A بتكون singular يعني ما الها inverse

➢ Elementary Matrices :

We say E is an elementary matrix if E can be obtained from I by one row operation.

– اذا شفت مصفوفة بتقدر تعتبرها على انها identity matrix مطبقين عليها row operation وحدة و فقط وحدة زي اللي كنا نطبقهم لما نحل المصفوفة بتكون هي E .

○ Example :

Which of the following is an elementary matrix?

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ yes , is an elementary matrix , the first row is multiplied by 2

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$ no , not an elementary matrix , the first row is multiplied by 2 and then the second row is multiplied as well.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$yes , is an elementary matrix , we added the triple of the first row to the second one.

- العمليات المسموح فيهم حتى اعتبرها elementary :

(1) ضرب احد الصفوف بثابت

(2) تبديل صفين

(3) إضافة اضعاف احد الصفوف الى صف اخر (مثل اخر مثال الفرع الثالث)

- حتى نقدر نوجد ال inverse عن طريق ال elementary matrix بدنا نفهم مجموعة شغلات :

(1) لما اضرب مصفوفة بـ elementary matrix بكون بشبه ضرب المصفوفة بثابت عادي مضروب فقط في مدخلة وحدة شوفوا المثال :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & 3c \end{bmatrix}$$

(2) لما نطبق ال Jordan-gauss على المصفوفة العادية بنحولها ل identity .

(3) لما نطبق ال Jordan-gauss على ال identity تبع المصفوفة ، بنحولها لل inverse تبعها .

✓ بتتذكروا انه كل عملية وحدة كنا نعملها على identity نسميها row operation و نسمي المصفوفة الناتجة عنها elementary matrix ، هي هاي نفسها نقطة 3 ، اللي راح نعمله انه راح نقسمها لمجموعة مصفوفات elementary كل وحدة فيهم ناتجة عن وحدة من العمليات اللي كنا نعملهم عال identity حتى نحولها ل inverse ، و بنضربهم ببعض بيعطينا ال inverse .

THE GOLDEN LINE : $E_1E_2E_3 = A^{-1}$ which means that $(E_1E_2E_3)A = I$

➢ Question 1:

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ find A^{-1} using elementary matrices .

$E_1 = \begin{bmatrix} 1\backslash 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtained by multiplying the first row of the Identity by 1\2

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ obtained by adding the negative triple of the first row to the second one

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\backslash 4 \end{bmatrix}$

✓ Multiply them to each other and you will get the inverse

- **Question 2:**

Let A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, find E_1 ,E_2 ,E_3 , such that **($E_1E_2E_3$)A = I**

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\backslash 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $1\backslash 2R_2$

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $3R_3 + R_1$

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3\backslash 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $-3\backslash 4R_3 + R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **Question 3:**

Let A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

- Find $E_1E_2E_3$ and show that ($E_1E_2E_3$)A = I.
- Write A^{-1} as a product of elementary matrices.
- Write A as a product of elementary matrices.

– Solution (1):

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\backslash 17 \end{bmatrix}$

$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ then ($E_1E_2E_3$)A = I

- Solution (2):

  $A^{-1} = E_1E_2E_3$

- Solution (3):

  $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = (E_1E_2E_3)^{-1}$

Bold Lines & Proofs :

Proofs :

(1) The Identity of matrices multiplication is unique .

Proof :

Assume that I and I are two identities

$II' = I \longrightarrow II' = I \longrightarrow I = I'$

(2) If A is invertible then the inverse of A is unique.

Proof :

Assume B and C are two inverses of A , note that

$A \longrightarrow B$

$A \longrightarrow C$

$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

(3) If A is an invertible matrix with AB = AC , show that B = C.

Proof :

$AB = AC$

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$

$IB = IC$

$B = C$

(4) Show that $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Proof :

$(AB)(AB)^{-1} = I$ $\longrightarrow$ since the matrix has unique inverse then $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

$\longrightarrow (AB)(A^{-1}B^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

(5) Show that $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Proof :

$(kA)(kA)^{-1} = I$

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = (k \cdot \frac{1}{k})(AA^{-1}) = I$

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

(6) Show that $(A^{-1})^{-1} = A$

Proof :

$(A^{-1})(A) = I$

$(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I$

$A = (A^{-1})^{-1}$

(7) For any square matrix B , $B + B^t$, and BB^t , are symmetric.

Proof :

(a) $(B + B^t) = B^t + (B^t)^t = B^t + B = B + B^t \longrightarrow$ Symmetric

(b) $(BB^t)^t = (B^t)^t B^t = BB^t$

(8) Show that $B-B^t$ is skew symmetric

Proof :

$(B-B^t)^t = B^t - (B^t)^t = B^t - B = -(B^t - B)$

(9) For any square matrix A , $AA^t - A^tA$ is symmetric.

Proof :

$(AA^t - A^tA)^t = (AA^t)^t - (A^tA)^t = A^tA - AA^t \longrightarrow$ Symmetric

(10) If A is invertible then $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Proof :

$(A^t)(A^t)^{-1} = I$

$(A^t)(A^{-1})^t = (AA^{-1})^t = I^t = I$, thus $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

➤ Bold Lines :

(1) $A^n = AA \ldots\ldots A$ (n times)

(1) If A is invertible then $A^{-n} = A^{-1} A^{-1} \ldots\ldots A^{-1}$ (n times)

(2) $A^0 = I$ (A powered by zero = I)

$\longrightarrow$ Remember that I acts like number (1) in numerical operations.

(3) $(A^n)^m = A^{n\times m}$

(4) $(A^n)(A^m) = A^{n+m}$

(5) When A is invertible with $(A^{-1})^{-1} = A$, then :

✓ When A is invertible with $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ then , $(A^n(A^{-1})^n) = (AA^{-1})^n = I^n = I$

Dig in the Deep & Think Smart

- **Problem 1 :**

Let A = $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, find :

(1) Find A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{9-12}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

(2) If $(3B - 2I)^{-1} = A$, find B .

$(3B - 2I)^{-1} = A \longrightarrow (3B - 2I) = A^{-1} \longrightarrow 3B = A^{-1} + 2I \longrightarrow B = \frac{1}{3} A^{-1} + \frac{2}{3}I$

Then complete the solution and find the matrix B implementing ($B = \frac{1}{3} A^{-1} + \frac{2}{3}I$)

(3) If AX = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, find X

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Then complete the multiplication normally.

!!ATTENTION : Why we put the inverse of A before AX while multiplying ?

think about sizes , A has the size 2×2 , X has unknown size , then what is the thing that gave the matrix AX a size of 2×3 ??

you multiply 2×2 size of matrix A × (unknown) size of matrix X = (2×3) size , in the equation A × X = AX $\longrightarrow$ then surely X will be having the size (2×3).

Hence to have the right size and shape of X when multiplying $A^{-1} \times AX$

Order them like this : $A^{-1} \times AX$

!! And to be noted , $AX \times A^{-1}$ is undefined depending on multiplication rules, review them!

➢ Problem 2:

Let A be a square matrix such that $A^2 + 5A - I = 0$, show that A is invertible with

$A^{-1} = A + 5I$.

$A^2 + 5A - I = 0$

$A^2 + 5A = I$

$A(A + 5I) = I \longrightarrow$ If $B = (A + 5I)$, then $AB = I$, then B is the inverse of A

So $A^{-1} = B = A + 5I$

➢ Problem 3:

Use Gaussian elimination to solve the linear system :

$-x - 10y + 10z = -31$

$2x - y + z = -1$

$3x + 2y - 2z = 9$

$$\begin{bmatrix} -1 & -10 & 10 & -31 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\Big\downarrow \ \boxed{\text{Gaussian elimination}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & -10 & 31 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution = { 1 , 3+t , t , such that t € R }

Problem 4:

Determine which of the following is a linear equation or not.

(1) 2x + y + 5 $\longrightarrow$ yes , linear system

(2) 3x + $\frac{2}{y}$ + z = 6 $\longrightarrow$ no , not a linear system

(3) $\frac{2}{3}$x + y + 2z = 3 $\longrightarrow$ yes , linear system

Problem 5:

For which values of (k) does the next system has nontrivial solution ?

(k - 3)x + y = 0

x + (k – 3)y = 0

$$\begin{bmatrix} (k-3) & 1 & 0 \\ 1 & (k-3) & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ **Gaussian elimination**

$$\begin{bmatrix} 1 & (k-3) & 0 \\ 0 & -(k-3)^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

The system will have nontrivial solution when k = 4 or k = 2

✓ Check your solution

Problem 6:

Solve for x , y , z

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{-4}{z} = 1$

$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{8}{z} = 0$

$\frac{-1}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 5$

Assume that

$A = \frac{1}{x}$, $B = \frac{1}{y}$, $C = \frac{1}{z}$

Then solve the system for A , B , C , after that you can find the values of x , y , z.

Problem 7:

Find a , b , c , d such that :

$$\begin{bmatrix} a + 2b & c - 3d + a \\ b - d & d - 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a + 2b = 4

c – 3d + a = 5

b – d = -1

d – 2d = 2

then solve the system normally

Problem 8:

What conditions of the b's such that the following system has no solution

$x + -2y + z = b_1$

$2x + y + 2z = b_2$

$x -7y + z = b_3$

Put on the matrix , then implement Gaussian elimination , then by the substitution you'll find values of b's.

Problem 9:

If $(3A^t - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, then find A

Final answer : $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

Problem 10:

True or false?

(1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \longrightarrow$ false

$(A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$

(2) $(AB^{-1})(BA^{-1}) = I \longrightarrow$ true

$AB^{-1}BA^{-1} = A(B^{-1}B)A^{-1} = AIA^{-1} = I$

(3) $(A - B)^2 = (B - A)^2 \longrightarrow$ true

$(A - B)^2 = (-(B - A)^2) = (-1)^2 (B - A)^2 = (B - A)^2$