LINEAR ALGEBRA

DONE BY : FARAH HATEM

POWERUNIT

ال vector space : مجموعة معرفة على الجمع والضرب .

← شروطها ماتكونش فارغة ($\emptyset$)

← عشان تكون معرفة على الجمع ← 5 شروط لازم تتحقق .

← عشان تكون معرفة على الضرب ← 5 شروط لازم تتحقق .

* شروط الجمع * أو شروط الضرب *

نفرض عندنا مجموعة vector space بتتكون من عناصر →

نفرض منها مثلاً بالأول عبارة عن مجموعة أرقام :- (من مالانهاية إلى سالب مالانهاية)

$$\mathbb{R} = \{ \ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

كل عنصر منها بقدر أعبر عنه برمز مثل v أو u

وبقدر أسميها اصطلاحاً بالرمز V

إذاً لازم ينطبق عليها شروط الجمع الآتية :-

1. $u + v \in V$ or $\mathbb{R}$

2. $u + v = v + u$

3. $(u+v) + w = u + (v+w)$

4. هو أي مجموعة لازم يكون فيها عنصر
اسمه ← zero vector ← رمزه 0
لازم جمعه مع أي عنصر ثاني يرجع نفس العنصر
$0 + u = u$

(5) $u+(-u)=0$ → معكوس ال vector
الجمعي

* شروط الضرب *

(1) for any $k \in \mathbb{R}$ → $ku \in V$
real numbers

(2) $(k+c)v = kv + cv$

(3) $k(cv) = (kv)c$

(4) $k(u+v) = ku + kv$

(5) $1.u = u$ → صفري vector
برجع $\underline{1}$

ملاحظة (1) لما يجيبلي سؤال اتحقق اذا vector space
او لأ ، ممكن حل بغير طريقة الجمع والضرب ، فلازم حسب
هاي الطريقة الجبرية . اتأكد اذا بتحقق كل الشروط أو لأ

ملاحظة (2) اذا كان حاطط شرط في ال vector space
يعني انه العناصر داخل ال vectors تنتمي لفترات الاعداد
بعمليات احنا أخذنا بشرط ال zero vector وجودية وجود
في شروط الجمع / نفس الشيء بالنسبة للمعكوس لسالب اذا
كانت الفترات موجبة

Subject : / /

بين العشر شروط السابقة كثيرة، صعب تثبت عند حل بعضها انه vector space، لذلك بنقتصر حلهم بالأربع شروط التاليين

① $k0=0$
zero vector
مضروب بأي رقم
للزم يرجع ال zero vector

② $0 \cdot u = 0$
رقم صفر مضروب بأي vector
للزم يعطي zero vector

③ $-1(u) = -u$
$\hookrightarrow u + -u = 0$

④ $ku = 0 \leftarrow$ then
لما تكون هيك الناتج تكون
$k=0$,
$u=0$

مثال :- ← التعويض على ال R مضاف له حجمها 3 → $R^3 = \{(a,b,c)\}$
such that $(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,\ b+e,\ c+f)$
and $k(a,b,c) = (ka,kb,kc)$

① نطلع ال zero vector اولاً، لأنه عشان اثبت انه vector space للزم استخدم الأربع شروط اللي فوق و اطبقهم عليه

$0 = (0,0,0) \rightarrow$ * حسب العمليات الي معطيني اياها فوق هيك رح يكون شكله
ينتمي لل R^3

بحل المراجع بالعمليات اللي معرفلي اياها بالسؤال وبتكون هي مرجعي :

① $k0 = 0$

$k(0,0,0) = (0,0,0)$ ✓ متحقق

$= (k0, k0, k0) = (0,0,0)$

② $0(u) = 0$

$0(a,b,c) = (0a, 0b, 0c)$

$= (0, 0, 0)$ ✓ , متحقق

③ $-1(u) + u = 0$

$-u = -(a,b,c) = (-a,-b,-c)$

then $\rightarrow (-a,-b,-c) + (a,b,c) = (-a+a, -b+b, -c+c) = 0$

متحقق

④ $ku = 0$

$k(a,b,c) = (0,0,0) \rightarrow$ ✓ متحقق

اما هاي 0

اما هاد zero vector

← بالبداية هاد كان طالب مني اختبر الشروط عال standard operations

العمليات اللي معرفها للجمع والضرب هي العمليات الاصلية

What are general vector spaces?

3 عائلات

عائلة كثيرات الحدود. | عائلة المصفوفات | عائلة ال R زي اللي حلينا عليها مستوى

أمثلة على اثبات vector space من نوع $\mathbb{R}$، ولكن نعرف فيها ال الجمع و الضرب بغير الطريقة ال [standard.]

① $V = \{(x, y) \in R^2\}$

such that $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

and $k(a, b) = (ka, 0)$

(دائماً صفر)

zero vector (حسب عملية الجمع) $= (0, 0)$ بختاره دائماً بحيث لما انفذ عليه عملية الجمع الموجودة، وأجمعه مع vector ثاني، إنه يعطيني نفس ال vector

① $0u = 0$

$0(a, b) = (0, 0)$ ✓ متحقق

② $k0 = 0$

$k(0, 0) = (0, 0)$ ✓

③ $-u + u = 0$

$-\cancel{1}u = -1(a,b) = (-a,0)$ نجيب المعكوس اول حسب قواعد الضرب الي محددها السؤال

لأن دائماً صفر حسب السؤال.

$\rightarrow -u + u \overset{?}{=} 0$

$(-a,0) + (a,b) = (0,b)$ $\rightarrow$ X لم يتحقق الشرط

مجرد إنه شرط واحد فشل هي ليست vector space.

General vector spaces → عائلة المصفوفات .

* مثل ما عملنا على ال vector spaces من عائلة R لازم دايماً معرفين ومثبتين انهم vector spaces على ال standard operations ←

[الي هي عمليات الضرب والجمع العادية المعروفة] ، فالمجموعات الي تنتمي لعائلة المصفوفات معرفة كمان انها vector spaces على ال standard operations .

example :

$M_{n\times m}(\mathbb{R})$ is vector spaces under the standard operation

then prove that $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$ Is vector spaces under them.

$\Rightarrow 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (zero vector) اذا جمعته لاي vector برجعلي اياه نفسه

① $k0 = 0$

$k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

② $0u = 0$

$0 \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ $-u + u = 0$

$-u = -1(a,b) = (-a,0)$
لأن هذا معرف حسب السؤال.

نجيب المعكوس الجمعي حسب قوانين الضرب التي حددها السؤال

$\rightarrow -u + u \overset{?}{=} 0$

$(-a,0) + (a,b) = (0,b) \rightarrow$ X لم يتحقق الشرط

مجرد إنه شرط واحد ما تحقق هي ليست vector space.

General vector spaces → عائلة المصفوفات

* مثل ما عممنا على ال vector spaces من عائلة R عالضم والضرب
معرفين ومثبتين انهم على ال vector spaces ← standard operations

[الي هي عمليات الضرب والجمع العادية المعروفة] فالمجموعات الي
تنتمي لعائلة المصفوفات معرفة كأنها على vector spaces على
ال standard operations .

example:

$\underset{n\times m}{M}(\mathbb{R})$ is vector spaces under the standard operation.

then prove that $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \right\}$

is vector spaces under them.

$\Rightarrow 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (zero vector) اذا جمعته على اي vector برجعلي اياه نفسه

① $k0 = 0$

$k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

② $0u = 0$

$0 \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Subject :

③ $-u+u=0$

$$\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

④ $k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

وحدة منهم لازم تكون 0 بس

وحسب الحلول الي فوق

فهاي اجابة صحيحة وكاملة

theorm: let V is a vector spaces and let $w \leq V$ where $w \neq \emptyset$, then w is called a subspace of V if w the following conditions:

$\rightarrow u+v \in w \rightarrow u, v \in w$

$\rightarrow ku \in w \rightarrow u \in w$

trivial subspace   أصغر ← subspace ممكن توجده هو ال
بتكون فقط من ال (zero vector)

$$w = \{(0,0)\}$$

improper subspace   أكبر ← subspace ممكن توجده هو ال
(المجموعة كلها نفسها) ، داخلها جميع الأعداد الحقيقية وهي مبنية
على الشرطين

(example)

$$w_2 = \{(x, y) : y = 4x\} \rightarrow (x, 4x) = (x, y)$$

① $(x, 4x) + (a, 4a)$
$= (x+a, 4x+4a)$
$(x+a, 4(x+a))$ ✓

مثبتة علاقة
subspace

② $k(x, 4x)$
$= (kx, 4(kx))$ ✓

Scanned with CamScanner

[matrices subspaces]

example :

$$\omega_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

لانه ما في غيره فاجمعه مع حاله

① $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓ ينتمي الها

② $k\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓ ينتمي لها.

$$\omega_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\}$$

① $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix}$ ✓ ينتمي الها

② $k\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{bmatrix}$ ✓ ينتمي لها

Scanned with CamScanner

Theorem: let A be $n \times n$ matrix, then the solution set of homogeneous system A where $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ → الكل ← is called $\boxed{\text{null}}$

example: find null(A) if $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

turn it into homogeneous system then find the set of solutions which is the null

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{operations}]{\text{elementary}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{null}(A) = \{(2A - 3B), A, B\}$ → هي نفسها مجموعة الحلول لأنه الها infinitly many solutions

homogeneous لأنه مربعة ومتجانسة infinitly many solutions ما إلها حل إلا

linear combination theorem:

let V be a vector space $\{v_1, v_2, v_3 ---- v_n\}$ if $w = c_1v_1 + c_2v_2 + c_nv_n$, then w is a linear combination of $v_1, v_2, ---- v_n$

example:

$v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ show that $(5,7)$ is a linear combination

$(5,7) = c_1v_1 + c_2v_2$

$(5,7) = c_1(1,0) + c_2(0,1)$

$(5,7) = (c_1,0) + (0,c_2)$

$(5,7) = (c_1, c_2)$ it is a linear combination by elimination and $c_1 = 5$, $c_2 = 7$

[The SPAN]

$\boxed{\text{theorem}}$: let V be a vector spaces, the set of all linear combinations is called span.

$\boxed{\text{theorem}}$: span$\{v_1, v_2, v_3, \text{---} v_n\}$ is counting $v_1, v_2, \text{---}$

then

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \text{---}$

$v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 \text{---}$

$\boxed{\text{theorem}}$: span(S) = span(T), if each vector in S is a linear combination of T and each vector in T is a linear combination of S.

example: let $S = \{(1,6,4), (8,4,-1), (-1,2,5)\}$

$T = \{(1,-2,-5), (0,8,9)\}$

show that span(S) = span(t)

$(1,6,4) = c_1(1,-2,-5) + c_2(0,8,9)$

مع تكملة الحل بنلاقي انه c_1, c_2 الهم حلول

$(2,4,-1) = c_1(1,-2,-5) + c_2(0,8,9)$

مع تكملة الحل بنلاقي انه c_1, c_2 الهم حلول

ونكمل بنفس الطريقة بلاقي انه كلهم linear combinations

ونرجع بالعكس العكس انه كل vector في T هو linear combination

من S وبالتالي نحلها مثبتة ✓

Linearly Independent or not?

اذا انا جبت vector space ، وصرت اني اكتب ال zero vector عن طريق linear combination من ال vectors داخل المجموعة ، وكانت c_1, c_2, c_3 ، الحل وحيد فقط ، بصير اسمها المجموعة ← linearly independent

example: let $S = \{(-1,3), (-5,2)\} \in R^2$, determine whether S is linearly independent or not

$(0,0) = c_1(-1,3) + c_2(-5,2)$

لما نوزعها ، ونحلها homogeneous matrix زي ما تعلمنا بالامثلة اللي قبل :-

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بحل}} \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$$

unique solution

✓ linearly independent

* في طريقة اسهل لتحديد ال independence ، باستخدام شي بنسميه ال (Rank) ، شو هو؟ وكيف نستخدمه؟

[the Rank]

هو عدد ال leading ones في المصفوفة بعدما أحوطها
لل RREF باستخدام ال gaussian elemination

example:

let S: {(1,2,0,-3), (0,1,0,1), (-1,-1,0,4)},

determine whether it is linearly independent or not?

① بحول ال vectors لمصفوفة، بأني أحط كل واحد ع عمود

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

② بنبسطها الى RREF باستخدام ال ← Jordan-Gauss

③ اذا عدد ال leading one = عدد vectors ← linearly independent

اذا كان ال Rank < من عدد ال vectors ← linearly dependent

هنا مثلا Rank(A)=2 ← linearly dependent

example:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$, determine whether

$u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ linearly independent or not

← بنحط كل مصفوفة في عمود واحد بالطريقة الآتية ونوجد ال Rank
ونطلع النتيجة

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Subject :

ملاحظات:

① لو المجموعة اللي بيدي فيها ← (zero vector) حاتم
بتكون linearly independent بدون ما اشتغل بالسؤال
[او لو كان ما فيها الا ال zero vector]

② لو كان في مجموعة فيها 2 vectors ، واحد منهم هو حاصل ضرب
الآخر برقم

③ لو كان عدد ال vectors داخل المجموعة اكبر من حجم ال vector
الواحد اذاً المجموعة هي linearly independent

example :- $S : \{ (1, 2, 3), (37, 8, 19), (5, 34, 8), (83, 0, 1) \} \in R^{3}$

تحت المجموعة

عدد الفيكتورز أكبر من 3 ← اذاً linearly independent

مصطلحين مهمين طريقة حلهم مثل طريقة حل الأمثلة السابقة بس نتبع كلام الخرابة

① Theorem: let V be a vector space, then $B = \{ v_1, v_2, --- v_n \} \in V$ is called the Basis for V if

→ B is linearly independent in V

→ $\text{span}(B) = V$

② Theorem: suppose $B = \{ v_1, v_2, --- v_n \}$ is a basis for V, let $v \in V$, $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + --- c_n v_n$ there exist $c_1, c_2, --- c_n$ as the cordinate vector of V relative to B

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

③ Theorem : let $B = \{v_1, v_2, v_3 \cdots v_n\}$ be a basis for V, the number of vectors in B is called the dimension of V $\dim(V) = n$

ال dim = عدد ال vectors في ال basis

يعني بالضرورة الحرفية هو سحطين ال basis وانا بشتغل عليهم