* CH #1

* How to write a vector :-

↳ Cartesian : $\bar{A} = A_x \hat{a_x} + A_y \hat{a_y} + A_z \hat{a_z}$ OR (A_x, A_y, A_z)

هدول اسمهم Unit vector
قيمتهم = 1 بس بدلو على الاتجاه .
ومنهم بعرف إنه هاد ال vector
موجود بال Cartesian coordinate.

↳ Cylindrical : $\bar{A} = A_\rho \hat{a_\rho} + A_\phi \hat{a_\phi} + A_z \hat{a_z}$ OR (A_ρ, A_ϕ, A_z)

↳ Spherical : $\bar{A} = A_r \hat{a_r} + A_\theta \hat{a_\theta} + A_\phi \hat{a_\phi}$ OR (A_r, A_θ, A_ϕ).

Note

don't mix between points & vectors!
$p(x, y, z) \rightarrow$ point
$\bar{A} = (A_x, A_y, A_z) \rightarrow$ vector

* Vector Magnitude :- (Scalar)..

$$|\bar{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Scalar Quantities :-
time / mass / distance / temperature / entropy
electric potential / population
هدول ما الهم اتجاه بس قيمة

* Unit vector along a vector :-

$$\hat{a_A} = \frac{\bar{A}}{A} = \frac{A_x \hat{a_x} + A_y \hat{a_y} + A_z \hat{a_z}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

لما يطلب مني هاد الإشي
1) بطلع ال magnitude لل vector
2) بقسم ال vector على ال magnitude

Vector Quantities :-
Velocity / force / displacement
Electric field
هدول الهم قيمة + اتجاه .

* Operations on vectors :-

[1] Addition :

$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$

$= (A_x + B_x)\,\hat{a}_x + (A_y + B_y)\,\hat{a}_y + (A_z + B_z)\,\hat{a}_z$

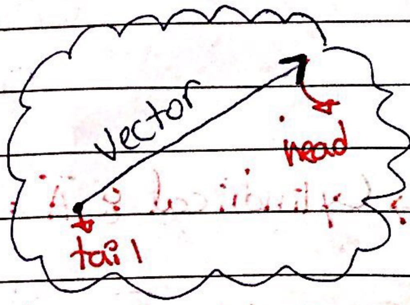
هاي بتدل على العملية الي عندي

from vector definition.

- Graphically :-

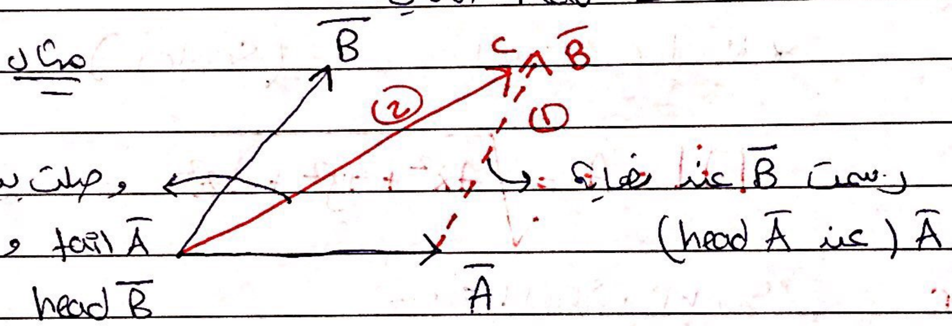
كيف ارسم جمع 2 vectors ؟

↳ Arrow method.



- عند نهاية الـ vector الأول (يعني الـ head)
بجيب الـ vector الثاني و برسمه ، بعدين
حاصل الجمع بكون توصيل بين الـ tail الأول
لـ head الثاني.

مثال



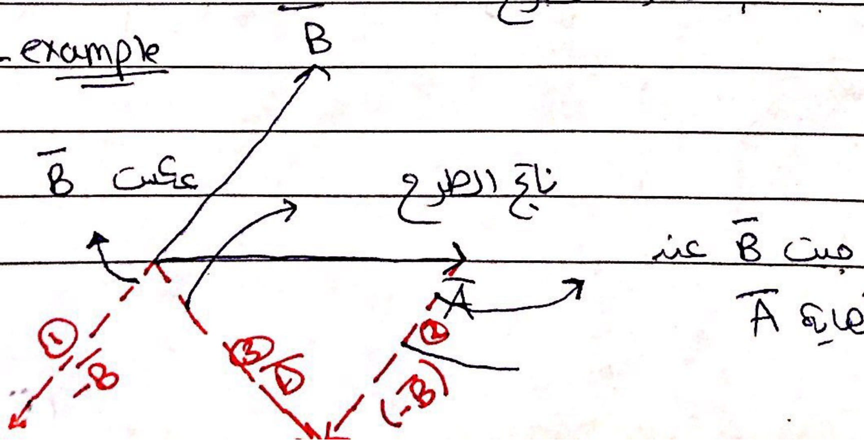
[2] Subtraction

$\bar{C} = \bar{A} - \bar{B}$

$= (A_x - B_x)\,\hat{a}_x + (A_y - B_y)\,\hat{a}_y + (A_z - B_z)\,\hat{a}_z$

- Graphically :- نفس طريقة الرسم ، لكن لازم أعكس
الـ vector الي بعد إشارة الطرح.

- example



Scanned with CamScanner

- Application on Subtraction is Distance (vector)

$P(x_1, y_1, z_1)$ → Point

$\bar{r}_{PQ}$ → distance vector from P to Q

$Q(x_2, y_2, z_2)$ → point

$\bar{r}_P = \bar{r}_{OP} = \bar{r}_P - \bar{r}_O$
المسافة لأي نقطة هي المسافة بين النقطة نفسها ونقطة الأصل

$$\bar{r}_{PQ} = \bar{r}_Q - \bar{r}_P$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{a}_x + (y_2 - y_1)\hat{a}_y + (z_2 - z_1)\hat{a}_z$$ → هيك طلعت الـ distance vector.

- إذا طلب الـ distance لحال يعني قيمة فقط باخذ الـ magnitude للـ $\bar{r}_{PQ}$ حسب القانون. $\Rightarrow |\bar{r}_{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

- إذا طلب الـ direction

$$\hat{a}_{r_{PQ}} = \frac{\bar{r}_{PQ}}{r_{PQ}} = -\hat{a}_{r_{QP}}$$

$-$ → عكس الاتجاه

[3] Multiplication.

↳ a) Dot product.

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}|\,|\bar{B}| \cos\theta_{(AB)}$$ → هاد القانون بستخدمه لما أكون بعرف الزاوية بين الـ vectors.

$\cdot$ → إشارة الـ dot product

- إذا ما بعرف الزاوية بفهم بستخدم هاد القانون

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

رح يطلع يعني الجواب رقم يعني scalar

- لو طلب مني الزاوية بستخدم هاد القانون

$$\theta_{AB} = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{A} \cdot \bar{B}}{|\bar{A}|\,|\bar{B}|}\right)$$

Scanned with CamScanner

* ليش الـ dot product بطلع قيمة Scalar ؟

لأنه القانون بعتمد على $\cos\theta$ ، ولما آجي أضرب vectors

بضرب الـ terms المتشابهة ، الزاوية بين الـ unit vectors

المهم = صفر ، $\cos(0) = 1$

توضيح ↳ $A_x \hat{a}_x \cdot B_x \hat{a}_x$

$= A_x B_x (\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x)$ ← أخذنا ثابتها بعامل مشترك

$= A_x B_x \; (1)$

لأنه الزاوية بينهم صفر

$$\hat{a}_n \cdot \hat{a}_m = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

properties of dot product :-

1) $\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$

2) $\bar{A} \cdot \bar{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

3) $\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{C}$

↳ b) Cross product (it has magnitude + direction).

$|\bar{A} \times \bar{B}| = AB \sin\theta_{AB}$ ← هاد القانون بستخدمه لما أعرف الزاوية بين $\bar{B}$ و $\bar{A}$

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

← إذا ما بعرف الزاوية بينهم بعمل cross product بينهم باستخدام الـ matrix ⟸

أول صف بحط الـ unit vector

ثاني صف بحط أول vector

وثالث صف بحط ثاني vector

$$\bar{A} \times \bar{B} = (-1)^{1+1} (A_y B_z - A_z B_y)\, \hat{a}_x$$
$$+ (-1)^{1+2} (A_x \cancel{B_z}^{B_z} - \cancel{A_z}^{A_z} B_x)\, \hat{a}_y$$
$$+ (-1)^{1+3} (A_x B_y - A_y B_x)\, \hat{a}_z$$

← أول مرة بخفي أول عامود و بضرب الثاني والثالث ببعض ، ثاني مرة بخفي ثاني عامود و بضرب الأول والثالث ، وآخر اشي بخفي ثالث عامود و بضرب الأول والثاني .

Scanned with CamScanner

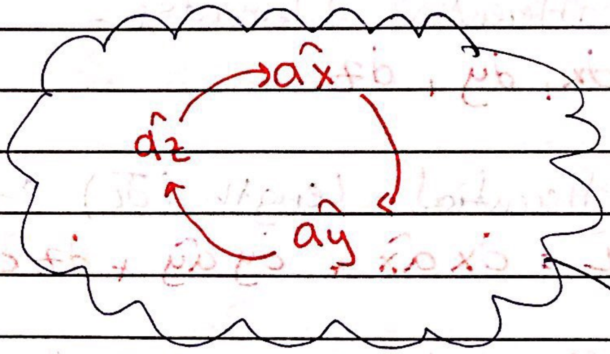
$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\bar{A}\times\bar{B}|}{|\bar{A}||\bar{B}|}\right)$

* إذا طلب مني الزاوية ←
بطلع $\bar{A}\times\bar{B}$ باستخدام الـ matrix حسب
القانون، بعدين باخذ الـ magnitude للـ vector
اللي طلع معي من الـ matrix ، وباخذ
الـ magnitude لـ $\bar{A}$ و $\bar{B}$ ، بقسم $\frac{|\bar{A}\times\bar{B}|}{|\bar{A}||\bar{B}|}$ ، وبعدين باخذ الـ ($\sin^{-1}$) لناتج القسمة.

Properties of cross product

1) $\bar{A}\times\bar{B} = -\bar{B}\times\bar{A}$ → السالب للاتجاه.
2) $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) \neq (\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C}$ → الأولوية للأقواس
3) $|\hat{a}_x \times \hat{a}_x| = 0$

لأنه الزاوية بينهم صفر
$0 = (\sin 0)$



إذا مشيت مع عقارب الساعة بكون الجواب موجب، وإذا عكس عقارب الساعة سالب

* Vector projection along another vector:—

↳ 1) Scalar projection:-

$A_B = \bar{A}\cdot\hat{a}_B$

2) Vector projection:-

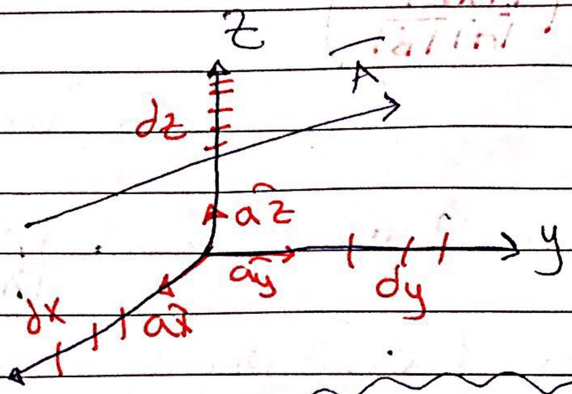
$\bar{A}_B = (\bar{A}\cdot\hat{a}_B)\,\hat{a}_B \quad , \quad \hat{a}_B = \frac{\bar{B}}{B}$

- لما يطلب مني Vector projection أول اشي بوجد $\hat{a}_B = \frac{\bar{B}}{B}$ اللي رح تكون Vector ، بعدين رح نعمل dot product بين $\bar{A}$ و $\hat{a}_B$ ، بطلع معي جواب scalar بضرب الجواب هاد بالـ $\hat{a}_B$.

Scanned with CamScanner

* CH #2

1) Cartesian Coordinates



$\bar{A} = Ax\,\hat{a}x + Ay\,\hat{a}y + Az\,\hat{a}z$

$-\infty < x < \infty$
$-\infty < y < \infty$
$-\infty < z < \infty$

3D object
Infinite Box

- Differential Elements :-

dx , dy , dz

* differential Length ($\bar{dL}$) :-

$\bar{dL} = dx\,\hat{a}x + dy\,\hat{a}y + dz\,\hat{a}z$

- differential Normal Surface Area ($\bar{ds}$).

$\bar{ds}_{front} = dy\,dz\,(\hat{a}x)$ → هاي اسمها العامودي

بالواجهة الأمامية بكون عندي اللي طالع من ال object هو العامودي

هو $\hat{a}x$.

$\bar{ds}_{back} = -dy\,dz\,\hat{a}x$ السالب للاتجاه لأنه العامودي

$\bar{ds}_{right} = dx\,dz\,\hat{a}y$ للداخل مش للخارج .

$\bar{ds}_{left} = -dx\,dz\,\hat{a}y$

$\bar{ds}_{top} = dx\,dy\,\hat{a}z$

$\bar{ds}_{bottom} = -dx\,dy\,\hat{a}z$

Differential Volume (dv)

$dv = dx\,dy\,dz$ دايماً الحجم scalar مش vector .

* 2D Surface (we fix one variable only).

- if x = constant (not zero).
  - ↳ infinite plane parallel to yz plane.

لو سألني شو العامودي على هاد ال plane ؟

رح تكون $(\hat{a}_x)$ أو $(-\hat{a}_x)$ حسب إذا النقطة فوق ال plane أو تحته.

- if $x = 0$
  - ↳ infinite plane along yz plane.
- if y = constant (not zero)
  - ↳ infinite plane parallel to xz plane
- if $y = 0$
  - ↳ infinite plane along xz plane
- if z = constant (not zero)
  - ↳ infinite plane parallel to xy plane
- if $z = 0$
  - ↳ infinite plane along xy plane.

** 1D Segment (we fix two variables).

- if x, z are constants (not zero) ($x \neq 0$, $z \neq 0$).
  - ↳ infinite line parallel to y-axis.
- if $x = 0$, $z = 0$
  - ↳ infinite line along y-axis.
- if y, z constants ($y \neq 0$, $z \neq 0$).
  - ↳ infinite line parallel to x-axis.

Scanned with CamScanner

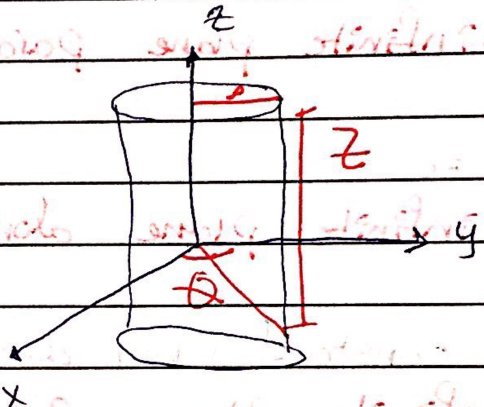
- if $y=0$, $z=0$.
  ↳ infinite Line along x-axis.

- if x, y are constants ($x \neq 0$, $y \neq 0$)
  ↳ infinite Line parallel to z-axis.

- if $x=0$, $y=0$.
  ↳ infinite Line along z-axis.

* Cylindrical coordinates.

$$0 \leq \rho < \infty$$
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$
$$-\infty < z < \infty$$



Infinite solid Cylinder.

$$\bar{A} = A_\rho \hat{a}_\rho + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

* Differential Elements:-

$d\rho$, $\rho\, d\phi$, dz.

$$\bar{dL} = d\rho\, \hat{a}_\rho + \rho\, d\phi\, \hat{a}_\phi + dz\, \hat{a}_z$$

$$\bar{dS}_{top} = \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{a}_z$$

$$\bar{dS}_{bottom} = -\rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{a}_z$$

$$\bar{dS}_{side} = \rho\, d\phi\, dz\, \hat{a}_\rho$$

$$\bar{dS}_{cut}\ (\phi = \text{constant}) = d\rho\, dz\, \hat{a}_\phi$$

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz.$$

كيف عرفته؟ بحدد العامودي على السطح و بضرب الباقية ببعض

لما يحكيلي اشي هو const بكون عامودي

* 2D Surface (we fix one variable).
  - ρ = constant → infinte hollow cylinder
    $\rho = 0$ → inf line along z-axis

  - ϕ = constant → semi-infinite plane
    $\phi = 90°$ → semi-inf plane along yz plane.

  - z = constant → inf. Disk // xy plane
    z = 0 → inf. Disk along xy plane.

* 1 D Surface (we fix 2 variables).
  - ρ, ϕ constants & $\rho \neq 0$
    ↳ inf. Line parallel to z-axis

  - ρ, ϕ constants & $\rho = 0$
    ↳ inf. Line along ~~y~~ z-axis

  - ρ, z constants ($z \neq 0$, $\rho > 0$).
    ↳ Circle // xy plane

  - ρ, z constants ($z = 0$, $\rho > 0$)
    ↳ Circle along xy plane

  - ρ, z constants ($\rho = 0$)
    ↳ point

  - ϕ, z constants
    ↳ semi-inf Line (Ray)

Scanned with CamScanner

* Spherical coordinates:-

$0 \leq r < \infty$
$0 \leq \theta \leq \pi$
$0 \leq \phi \leq 2\pi$

3D object
Infinite Solid
Sphere.

$\bar{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi$

* Differential Elements:-

dr , $r d\theta$, $r\sin\theta\, d\phi$

- $\bar{dL} = dr\, \hat{a}_r + r d\theta\, \hat{a}_\theta + r\sin\theta\, d\phi\, \hat{a}_\phi$

$\bar{ds}$ surface $= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \hat{a}_r$

$\bar{ds}_\theta = r\sin\theta\, dr\, d\phi\, \hat{a}_\theta$

$ds_\phi = r\, dr\, d\theta\, \hat{a}_\phi$

$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

* 2D Surface (we fix one variable).

- if $r =$ constant $(r \neq 0) \rightarrow$ hollow sphere.
- if $r = 0 \rightarrow$ point
- if $\theta =$ constant
  - ↳ $\theta \in (0, 90)$ and $(90, 180) \rightarrow$ inf. hollow ~~sphere~~ cone.
  - ↳ $\theta = 90° \rightarrow$ inf. disk along xy plane
  - ↳ $\theta = 0° \rightarrow$ Semi-inf. Line in the +ve z-axis
  - ↳ $\theta = 180° \rightarrow$ semi-inf Line in the -ve z-axis.

- if $\phi =$ constant $\rightarrow$ semi-inf. Disk
  - ↳ $\phi = 90° \rightarrow$ semi-inf Disk along yz plane.

Scanned with CamScanner

* 1D Segment (we fix 2 variables).

- if r, θ constants
  - ↳ $(r > 0), (\theta \neq 90°)$ → Circle // xy plane
  - ↳ $(r > 0), (\theta = 90°)$ → Circle along xy plane
  - ↳ $r = 0$ → point

- if r, ϕ constants.
  - ↳ $(r > 0)$ → half circle
  - ↳ $(r = 0)$ → point

- if θ, ϕ are constants
  - ↳ semi-inf. Line (Ray).

* Transformation between coordinates :-

المعطى المطلوب

- $(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \phi, z)$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad z = z.$$

- $(\rho, \phi, z) \longrightarrow (x, y, z)$

$$x = \rho \cos\phi \quad , \quad y = \rho \sin\phi \quad , \quad z = z$$

- $(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi).$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \quad , \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Scanned with CamScanner

* $(r, \theta, \phi) \rightarrow (x, y, z)$

$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

* ~~[illegible]~~

* $(\rho, \phi, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\rho}{z}\right)$, $\phi = \phi$

* $(r, \theta, \phi) \rightarrow (\rho, \phi, z)$

$\rho = r\sin\theta$, $\phi = \phi$, $z = r\cos\theta$

القوانين الي قبل كلها لتحويل نقاط فقط مش Vectors

* Vectors Transformation

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

المطلوب — المعطى

هاي ال matrix بتكون معطاة بالامتحان.

$A_\rho = \cos\phi \, A_x + \sin\phi \, A_y$.

⋮

لو طلب مني ال cartesian وكان معطيني ال cylindrical كيف أحلها؟

باخد ال transpose للماتركس يعني كل عامود بصير صف وبكمل بنفس الطريقة .

Scanned with CamScanner

* CH # 3

* Line Integral :-

$$\int_{l} \bar{A} \cdot \bar{dL}$$

ممكن تكون أي وحدة من القوانين
اللي أخذناهم .

* Surface Integral :-

$$\int_{s} \bar{A} \cdot \bar{ds}$$

* Volume Integral :-

$$\int |\bar{A}| \, dv$$

* Del operator (∇)

- in Cartesian

هاي اسمها
Partial

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \hat{a_x} + \frac{\partial v}{\partial y} \hat{a_y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{a_z}$$

تطبيق على ∇

Gradient

$\nabla * V$ = vector

vector ↓ scalar

- in cylindrical

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \hat{a_\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} \hat{a_\phi} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{a_z}$$

- in spherical

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{a_r} + \frac{1T}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{a_\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{a_\phi}$$

Scanned with CamScanner