DIFFERENTIAL

المادة الكاملة :- Ch.1 + Ch.2+Ch.3+ Ch.7+Ch.4+Ch.5
+ch.6

دفتر الدكتورة :- إيمان الدرعاوي (الفصل الثاني 2019)

إعداد الطالب :- أسامة الكردي

Ordinary differential Equations

1.1 Basic concepts

[1] O.D.E = an equation which contains the derivatives of the unknown → * y *

ex $2y' + y = 0$

$y' = (x+1)e^{-x} y^2$

$y''' - 2x(y'')^3 = 0$

* في الـ O.D.E نحن نبحث عن قيمة الـ y وهو عبارة عن function *

*إذا لم تقم بعمل classification للـ Eqution فلن تستطيع حلها *

[2] Classification

a) Order

the highest order of derivatives

* ننظر إلى أعلى مشتقة *

b) Linear and non Linear

* صيغة الـ Linear *

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{(n+1)}(x) y^{(n+1)} + \dots + a\, y = f(x)$$

* Linear = ممنوع الـ y تكون مضروبة بنفسها أو بمشتقاتها ويمنع أيضاً أن تكون هي أو مشتقاتها مرفوعة لغير الأس 1 *

أيضاً

Non Linear

* إذا رأيت التالي في الـ Equation ففي * non Linear

$\{y^2, \sqrt{y}, e^{y}, \ln y, \sin y, y \cdot y', y'' \cdot y'\}$

$\sin(x) y' + y = 0$

Linear $\xrightarrow[\text{why?!}]{}$ ما دخلي بالـ X

C) homogenous and non homo

If $f(X) = 0$ homo

$f(X) \neq 0$ non homo

* بدور في ال Equation على
* 0 ما يكون بشرط pure function of x

---

ex

① $y'' - \sin(x)\, y' - y = \boxed{\sin(x)}$ → pure function of x

2^{nd} order, Linear, non homo

② $y''' - 2x(y'')^3 = 0$

3^{rd} order, non Linear, homo

③ $(x-1)\, y' + y = 0$

1^{st} order, Linear, homo

④ $y'' + 3y = \boxed{2}$ → pure function of x

2^{nd} order, Linear, non homo

⑤ $y' + e^x y = \boxed{x^2}$ → pure function of x

1^{st} order, Linear, non homo

⑥ $(x + xy)\, dx + 2y\, dy = 0$

* بقسمة الطرفين على dx *

$(x + xy) + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) \rightarrow \boxed{y'}$

$\boxed{x} + xy + 2yy' = 0$

1^{st} order, non Linear, non homo

→ * pure function of x *

3 In O.D.E we looking for the sol $y=f(x)$ so the sol of O.D.E is $y=f(x)$ satisfying the O.D.E

---

ex show that $y=10-Ce^{-x}$ where C is constant, is a sol to $y'+y=10$

$y=10-Ce^{-x}$

$y'=Ce^{-x}$

$Ce^{-x}+10-Ce^{-x}\overset{?}{=}10$

$10=10$

4 Initial value problem

IVP = O.D.E + Initial Condition

ex show that $y=ce^{2x}$ is a sol of IVP $y'=2y$

$y(0)=1$ ↳ to find the value of c

* في الـ IVP دائماً أجد قيمة C في نفس اللحظة التي يظهر فيها وإذا كان موجود في السؤال فيجب إيجاد قيمته قبل البدء بحل السؤال *

$y=ce^{2x}$

$1=ce^{2(0)}$

$1=c$

$y=e^{2x}$

$y'=2e^{2x}$

$y'=2y$

$2e^{2x}\overset{?}{=}2e^{2x}$ ✓

1.3 separable O.D.E

$f(x)\,dx = g(y)\,dy$

*إذاً تم تحويل الـEquation على هذه الصورة فإن الحل يكون بتكامل الطرفين *

ex which of the following sep

① $x\sin(y)\,dx + x^2 dy = 0$

$x\sin(y)\,dx = -x^2 dy$

$\frac{-dx}{x} = \frac{dy}{\sin(y)}$ sep

② $x\,dx + x^2 y\,dy = 0$

$x\,dx = -x^2 y\,dy$

$\frac{-dx}{x} = y\,dy$ sep

③ $dx + x^2 y\,dy = 0$

$dx = -x^2 y\,dy$

$\frac{-dx}{x^2} = y\,dy$ sep

④ $(x+y)\,dx + x^2\sin(y)\,dy = 0$

$\frac{(x+\boxed{y})}{-x^2}\overset{!!!}{dx} = \sin(y)\,dy$ non sep

ex solve O.D.E

① $\frac{dy}{dx} = y^2\cos(x)$

$\int\frac{dy}{y^2} = \int\cos(x)\,dx$

$\frac{-1}{y} = \sin(x) + C$

② $e^{x+y}\,dx = e^{x-2y}\,dy$

$\cancel{e^x}\,e^y\,dx = \cancel{e^x}\,e^{-2y}\,dy$

$dx = \frac{e^{-2y}}{e^y}\,dy$

$\int dx = \int e^{-3y}\,dy$

$\frac{e^{-3y}}{-3} = x + C$

③ $\frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + y^2 + x^2 + 1$

$y(\underset{\substack{\downarrow\\x}}{0}) = \underset{\substack{\downarrow\\y}}{2}$

$\frac{dy}{dx} = y^2(x^2+1) + (x^2+1)$

$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)(y^2+1)$

$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int (x^2+1)\, dx$

$\tan^{-1} y = \frac{x^3}{3} + x + C$

$\tan^{-1} 2 = 0 + 0 + C$

$C = \tan^{-1} 2$

$\tan^{-1} y = \frac{x^3}{3} + x + \tan^{-1} 2$

④ $dy - xy\,dx = (4y + 3x + 12)\,dx$

$dy = (4y + 3x + 12 + xy)\,dx$

$dy = (4y + 12 + x(3+y))\,dx$

$dy = (4(y+3) + x(3+y))\,dx$

$dy = (y+3)(x+4)\,dx$

$\int \frac{dy}{y+3} = \int (x+4)\,dx$

$\ln|y+3| = \frac{x^2}{2} + 4x + C$

Reduction to separable

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $u = \frac{y}{x} \Rightarrow$ sep

any eq. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

then homo.

ex solve

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}$$

$$2y' = \boxed{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}$$

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}}$$

Let $u = \frac{y}{x}$

$$y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u$$

$$2(u'x + u) = u - \frac{1}{u}$$

$$2u'x + \underline{2u} = \frac{u^2 - 1}{u}$$

$$2x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2 - 1}{u}$$

$$\int \frac{2u\,du}{-u^2 - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|u^2 + 1| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{y^2}{x^2} + 1\right| = -\ln|x| + C$$

ex 2 $xy' = y + 2x^3 \sin^2(\frac{y}{x})$, $x \neq 0$

$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \sin^2(\frac{y}{x})}{x}$

$= \frac{y}{x} + 2x^2 \sin^2(\frac{y}{x})$ homo

Let $u = \frac{y}{x}$, $ux = y$, $y' = u'x + u$

$u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + 2x^2 \sin^2(u)$

$u' = 2x \sin^2(u)$

$\frac{du}{dx} = 2x \sin^2(u)$

$\int \frac{du}{\sin^2(u)} = \int 2x \, dx$

$-\cot(\underset{\underset{u = \frac{y}{x}}{\downarrow}}{u}) = x^2 + C$

ex $(x^2 e^{2\frac{y}{x}} + xy)\,dx = x^2 dy$

* بقسمة الطرفين على x^2 *

$(e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x})\,dx = dy$

$y' = e^{2\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

$u'x + \cancel{u} = e^{2u} + \cancel{u}$

$\frac{du}{dx} x = e^{2u}$

$\int \frac{du}{e^{2u}} = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{e^{-2u \rightarrow \frac{y}{x}}}{-2} = \ln|x| + C$

ex $(x+y)\,dy = (x-y)\,dx$

$$y' = \frac{(x-y)/x}{(x+y)/x} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

*بقسمة البسط
والمقام على X *

$$u'x + u = \frac{1-u}{1+u}$$

$$u'x = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$u'x = \frac{1-u}{1+u} - \frac{u(1+u)}{1+u}$$

$$u'x = \frac{1-u-u-u^2}{1+u}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

$$\int \frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{2}\ln|1-\underset{\frac{y}{x}}{2u}-\underset{(\frac{y}{x})^2}{u^2}| = \ln|x| + C$$

1.4 Exact O.D.E, Integrating Factor (Reduction to Exact)

[I] Exact O.D.E

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ ------ } (*)$$

If: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$M_y = N_x$$

$\Longrightarrow$ (*) is Exact O.D.E

The general sol. of (*) Is $u(x,y) = C$

Recall $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \\ M\,dx + N\,dy = 0 \\ M = \frac{\partial u}{\partial x}, N = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$

* يمكنك حل سؤال الـExact
إما باستخدام ① أو ②
والجواب سيكون نفسه *

① $u(x,y) = \int M\,dx + f(y)$

② $u(x,y) = \int N\,dy + f(x)$

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}}}_{N} = \left(\int M\,dx\right)'_y + f'(y)$$

أو

$$*\underbrace{\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{M} = \left(\int N\,dy\right)'_x + f'(x)\,*$$

ex $\underbrace{(1-\sin(x)\tan(y))}_{M}dx + \underbrace{\cos(x)\sec^2(y)}_{N}dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} M_y = -\sin(x)\sec^2(y) \\ N_x = -\sin(x)\sec^2(y) \end{array}\right)\Rightarrow \text{Exact}$$

Then sol:

$u(x,y) = C$

$u(x,y) = \int(1-\sin(x)\tan(y))\,dx + f(y)$

$u(x,y) = x + \cos(x)\tan(y) + f(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x)\sec^2(y) + f'(y)$,

$\cos(x)\sec^2(y) = \cos(x)\sec^2(y) + f'(y)$

$\cancel{\cos(x)\sec^2(y)} = \cancel{\cos(x)}\sec^2(y) + f'(y)$

$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = C$

$u(x,y) = x + \cos(x)\tan(y) + C = C$

$u(x,y) = x + \cos(x)\tan(y) = C$

$x + \cos(x)\tan(y) = C$

ex $\underbrace{(2x\cos(y)+3x^2y)}_{M}dx+\underbrace{(x^3-x^2\sin(y)-y)}_{N}dy=0$

$y(0)=2$

$$\left.\begin{aligned}M_y&=-2x\sin(y)+3x^2\\ N_x&=3x^2-2x\sin(y)\end{aligned}\right)\Rightarrow \text{Exact}$$

The sol. $u(x,y)=C$

$u(x,y)=\int(2x\cos(y)+3x^2y)\,dx+f(y)$

$u(x,y)=x^2\cos(y)+x^3y+f(y)$

$u(\cancel{x},y)=x^2\cos(y)+x^3+f'(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2\sin(y)+x^3+f'(y)$

$\cancel{x^3}-\cancel{x^2\sin}(y)-y=-\cancel{x^2\sin(y)}\cancel{+x^3}+f'(y)$

$f'(y)=-y\Rightarrow f(y)=\frac{-y^2}{2}$

$u(x,y)=x^2\cos(y)+x^3y-\frac{y^2}{2}=C$

$x^2\cos(y)+x^3y-\frac{y^2}{2}=C$

$0+0-\frac{2^2}{2}=C$

$C=-2$

$x^2\cos(y)+x^3y-\frac{y^2}{2}=-2$

$\boxed{2}$ Integrating Factor (Reduction to Exact)

* ستكون المعادلة non-Exact أي أن $M_y \neq N_x$ لكن سنضرب بـ F لتصبح Exact

أي أن $M_y \overset{\text{سوف}}{\underset{\text{الجديدة}}{=}} N_x$ الجديدة *

F: is Integrating Factor If

$$F\,M(x,y)\,dx + F\,N(x,y)\,dy = 0$$

Is Exact O.D.E

How to Find F.

$\boxed{1}$ $F(x) \Rightarrow$ ① $R(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$

② $F(x) = e^{\int R(x)\,dx}$

$\boxed{2}$ $F(y) \Rightarrow$ ① $R(y) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$

② $F(y) = e^{\int R(y)\,dy}$

* كيف أختار $F(x)$ أو $F(y)$ للحل؟
بعد ما أطرح M_y من N_x بختار
الي بدي اقسم عليه إما N
أو $-M$ لكن بختار الي بخليلي
أشي مع البسط مشان R يصفي
~~بدلالة متغير واحد إما x أو y~~ *

ex Solve:

$$\underbrace{x^{-1}\cosh(y)}_{M}\,dx + \underbrace{\sinh(y)}_{N}\,dy = 0 \;\cdots\cdots ⊛$$

$M_y = x^{-1}\sinh(y)$
$N_x = 0$
$\Big)\!\!\!\not\Big)$ non-Exact

$$F \Rightarrow R(x) = \frac{x^{-1}\sinh(y) - 0}{\sinh(y)} = \frac{x^{-1}\sinh(y)}{\sinh(y)} = \frac{1}{x}$$

* بما أن R بدلالة x فقط
معناه R(x) و F هو F(x) *

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

* قسمنا على N
وطلعنا بس
$\frac{1}{x}$ *

Multiply ⊛ by x

$$\underbrace{\cosh(y)}_{M}\,dx + \underbrace{x\sinh(y)}_{N}\,dy = 0$$

* بعد ما ضربنا المعادلة
بـ F(x) أصبحت Exact
ونحلها كما تعلمنا
سابقاً *

$M_y = \sinh(y)$
$N_x = \sinh(y)$
$\Big)\Big)$ Exact

$u(x,y) = C$

$$u(x,y) = \int \cosh(y)\,dx + f(y)$$

$$u(x,y) = x\cosh(y) + f(y)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} = x\,\cancel{\sinh(y)} + f'(y) = \cancel{x\sinh(y)}$$

$f'(y) = 0, \quad f(y) = C$

$u(x,y) = x\cosh y = C$

$x\cosh y = C$

ex $\underbrace{(3x^2y+y^2)}_{M}dx+\underbrace{(2x^3+3xy)}_{N}dy=0$ --- ⊛

3

$$\left.\begin{aligned} M_y &= 3x^2+2y \\ N_x &= 6x^2+3y \end{aligned}\right\} \neq$$ non - Exact

$$F \Rightarrow R(y) = \frac{3x^2+2y-6x^2-3y}{-3x^2y-y^2}$$

$$= \frac{\cancel{-3x^2-y}}{y\cancel{(-3x^2-y)}} = \frac{1}{y}$$

$$F(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

M ⊛ by y

$$\underbrace{(3x^2y^2+y^3)}_{M}dx+\underbrace{(2x^3y+3xy^2)}_{N}dy=0$$

$$M_y = 3x^2 \cdot 2y + 3y^2 = 6x^2y+3y^2$$

$$N_x = 3x^2 \cdot 2y + 3y^2 = 6x^2y+3y^2$$

$$u(x,y) = C$$

$$u(x,y) = \int (2x^3y+3xy^2)dy + f(x)$$

$$u(x,y) = x^3y^2 + xy^3 + f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{3x^2y^2+y^3} + f'(x) = \cancel{3x^2y^2+y^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C$$

$$u(x,y) = x^3y^2 + xy^3 = C$$

$$x^3y^2 + xy^3 = C$$

1.5 First Order Linear O.D.E, Bernoulli D.E (Reduction to linear)

[1] First order Linear O.D.E

$$y' + p(x)\,y = f(x)$$

$\to f(x) = 0 \Rightarrow$ homo, sep

$\to f(x) \neq 0 \Rightarrow 1^{st}$ order, linear

$$e^{\int p(x)\,dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)\,dx} \cdot f(x)\,dx + C$$

ex $x y' + 2y = \sin x \quad , \quad x > 0$

$$y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{f(x)}$$

* لجعل معامل y' يساوي 1 قمنا بقسمة المعادلة على x *

$$e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot y = \int e^{\int \frac{2}{x} dx} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx + C$$

$$x^2 y = \int x \sin x\,dx + C$$

$\to$ * by parts *

$$x^2 y = -x\cos x + \sin x + C$$

ex $(1+x^2)\,dy + 4xy\,dx = (1+x^2)^{-2}\,dx$

* بقسمة المعادلة على dx *

$$(1+x^2)\,y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$$

* بقسمة المعادلة على $(1+x^2)$ *

$$y' + \underbrace{\frac{4x}{1+x^2}}_{p(x)} y = \underbrace{(1+x^2)^{-3}}_{f(x)}$$

$$e^{\int \frac{4x}{1+x^2} dx} \cdot y = \int e^{\int \frac{4x}{1+x^2} dx} \cdot (1+x^2)^{-3}\,dx + C$$

$$(1+x^2)^2 y = \int (1+x^2)^2 (1+x^2)^{-3}\,dx + C$$

$$(1+x^2)^2 y = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + C$$

$$(1+x^2)^2 y = \tan^{-1}(x) + C$$

ex $y\,dx - (4y^2 - 2x)\,dy = 0$

* بقسمة المعادلة على dy *

* اذا قسمت المعادلة على dx فإن الحل لن يزبط معك *

$y x' - 4y^2 - 2x = 0$

* بقسمة المعادلة على y *

$$x' - \underbrace{\frac{2}{y}}_{P(y)} x = \underbrace{4y}_{f(y)}$$

* تم قلب المتغيرات $P(y) \leftarrow P(x)$

$P(y) \xleftarrow{و} f(x)$

* $e^{\int P(y)dy} \cdot x = \int e^{\int P(y)dy} \cdot f(y)\,dy$ واصبح الحل

$$e^{\int \frac{2}{y}dy} \cdot x = \int e^{\int \frac{2}{y}dy} \cdot 4y\,dy + C$$

$$y^2 x = \int y^2 \cdot 4y\,dy + C$$

$$y^2 x = \int 4y^3\,dy + C$$

$$y^2 x = y^4 + C$$

2 Bernoulli D.E (Reduction to linear) ⑮

$$y' + P(x)y = f(x)y^n \; \text{---} \circledast \quad , n \neq 0, 1$$

$n = 0$

$y' + P(x)y = f(x)$

1st order, linear

* تكلمنا عن طريقة حلها سابقاً *

$n = 1$

$y' + P(x)y = f(x)\,y$

$y' = f(x)\,y - P(x)\,y$

$y' = (f(x) - P(x))\,y$

$\frac{dy}{dx} = (f(x) - P(x))\,y$

$\frac{dy}{y} = (f(x) - P(x))\,dx$

sep

* let $u = y^{1-n}$

$u' = \frac{du}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,y'$

Multiply ⊛ by $(1-n)\,y^{-n}$

Scanned by CamScanner

ex: solve:

① $x^2 y' + 2xy = y^3$

$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2} y^3$ *Ber*

let $u = y^{1-3} = y^{-2}$

$u' = -2y^{-3} \cdot y'$

Multiply Ber by $-2y^{-3}$

$-2y^{-3} y' - \frac{4}{x} y^{-2} = \frac{-2}{x^2}$

$u' - \underbrace{\frac{4}{x}}_{p(x)} u = \underbrace{\frac{-2}{x^2}}_{f(x)}$ *1st order Linear O.D.E*

$e^{\int \frac{-4}{x} dx} \cdot u = \int e^{\int \frac{-4}{x} dx} \cdot \frac{-2}{x^2} \, dx + C$

$\frac{u}{x^4} = \frac{2}{5x^5} + C$

$\frac{y^{-2}}{x^4} = \frac{2x^{-5}}{5} + C$

② $2xyy' + (x-1)y^2 = x^2 e^x$

* بقسمة المعادلة على 2xy لجعل معامل y' يساوي 1 *

$y' + \frac{x-1}{2x} y = \frac{xe^x}{2} y^{-1}$ *Ber*

let $u = y^{1--1} = y^2$

$u' = 2y \cdot y'$

Multiply Ber by $2y$

$2y \cdot y' + \frac{x-1}{\cancel{2}x} \cancel{2}y^2 = \frac{xe^x}{\cancel{2}} \cancel{2y} \cancel{y^{-1}}$

$u' + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{p(x)} u = \underbrace{xe^x}_{f(x)}$

$e^{\int \frac{x-1}{x} dx} \cdot u = \int e^{\int \frac{x-1}{x} dx} \, xe^x \, dx + C$

$\frac{e^x}{x} \cdot u = \int \frac{e^x}{\cancel{x}} \cancel{x} e^x + C$

$\frac{e^x}{x} \cdot u = \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{e^x}{x} y^2 = \frac{e^{2x}}{2} + C$

③ $x\,dx = (y - yx^2)\,dy$ sep

answer ⇒ $\frac{y^2}{2} = \frac{-1}{2} \ln|1 - x^2| + c$

④ * $6y^2\,dx = x(2x^3 + y)\,dy$

*بقسمة المعادلة على dy *

* اذا قسمت المعادلة على dx فإن الحل لن يزبط معك *

$$6y^2 x' = 2x^4 + xy$$

* بقسمة المعادلة على $6y^2$ *

$$x' = \frac{x^4}{3y^2} + \frac{x}{6y}$$

$$x' - \frac{1}{6y} x = \frac{1}{3y^2} x^4$$ *Ber*

* تم قلب المتغيرات فاصبح الحل

$$u = x^{1-4} = x^{-3}$$

$$u' = \frac{du}{dx} = -3x^{-4} x'$$

* Multiply Ber by $-3x^{-4}$

$$-3x^{-4} x' - -3x^{-4} \frac{x}{6y} = -3x^{-4} \frac{x^4}{3y^2}$$

$$-3x^{-4} x' + \frac{x^{-3}}{2y} = \frac{-3}{3y^2}$$

$$u' + \underbrace{\frac{1}{2y}}_{p(y)} u = \underbrace{\frac{-1}{y^2}}_{f(y)}$$

$$e^{\int \frac{1}{2y} dy} \cdot u = \int e^{\int \frac{1}{2y} dy} \cdot \frac{-1}{y^2}\,dy + c$$

$$y^{\frac{1}{2}} \cdot u = \int y^{\frac{1}{2}}\,dy \cdot \frac{-1}{y^2}\,dy + c$$

$$y^{\frac{1}{2}} \cdot u = 2y^{\frac{-1}{2}} + C$$

$$y^{\frac{1}{2}} x^{-3} = 2y^{\frac{-1}{2}} + C$$

Homework

solve:

* ① $y' = (y+4x)^2$

* ② $y' = (x+y-2)^2, \quad y(0) = 2$

Ch1 Done

Ch2 2^{nd} order linear O.D.E

2.1 Homogeneous ordinary D.E of 2^{nd} order

① $y'' + y' + y = f(x)$

2^{nd} order, linear
- if $f(x) = 0$ homo
- if $f(x) \neq 0$ non homo

$a(x)\,y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x)$ ---- ⊛

② If y is a sol. of ⊛ then cy is a sol. of ⊛

③ If y_1, y_2 are sol's of ⊛ then $c_1y_1 + c_2y_2$ is sol. of ⊛ if ⊛ is linear and homo

④ let y_1, y_2 2- sol's of ⊛

If $\frac{y_1}{y_2} = \underbrace{C}_{\text{*constant*}}$, $y_1 = Cy_2$

y_1 and y_2 are linear dep.

$\underbrace{\text{o.w}}_{\text{*otherwise*}}$, linear indep.

ex ① $y_1 = e^x$, $y_2 = 2e^x$,

$$\frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2} = \text{constant}$$

$\Rightarrow e^x, 2e^x$ are L.dep

② $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$,

$$\frac{e^{2x}}{xe^{2x}} = \frac{1}{x} \neq C$$

then e^{2x}, xe^{2x} are L.Indep

Reduction of order

* تستخدم لحل الـ 2nd, non-L ولها نوعين *

① $y'' = f(x, y') \Rightarrow$ y- missing

Let $u = y'$

$u' = y''$

* سميت y-missing لأن الـ Eq لا تحتوي على y *

* بمعنى آخر يمكن إستخدامها إذا كانت المعادلة لا تحتوي على y *

ex $y'' + y' = 0$

* هذا المثال يحل بطرق
حل من الـ y-missing
التي نلجأ لها في حالة
الـ 2nd, non- L لكن
يمكن حله بالـ y-missing
لأن الـ Eq لا تحتوي على y *

y- missing

$u' + u = 0$ sep

$u' = -u$

$$\frac{du}{dx} = -u \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -dx$$

$\ln|u| = -x + c$

$\ln y' = -x + c$

$y' = e^{-x+c} \Rightarrow y' = ce^{-x}$ sep

$\int dy = \int ce^{-x} dx$

$$y = \underset{\overset{\uparrow}{y_1}}{-Ce^{-x}} + \underset{\overset{\uparrow}{y_2}}{C_1}$$

② $y'' = f(y, y')$ x-missing

* سميت x-missing
لأن الـ Eq لا تحتوي
على x *

Let $u = y'$.

$u' = y''$

* بمعنى آخر يمكن إستخدامها
إذا كانت المعادلة لا تحتوي على x *

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\boxed{\frac{dy}{dx}}$$

Chain Rule

$$= \frac{du}{dy}\,u$$

---

ex $y y'' + (y')^2 = 0$

* non-Line , 2nd إجباري
إستخدام الـ Reduction of order *

x-missing

$\boxed{u = y'}$, $u' = y''$

* ولأن المعادلة لا
تحتوي على x فأستخدم
الـ x-missing *

$$u' = u\frac{du}{dy}$$

$$y u' + u^2 = 0$$

$$y\frac{(u\,du)}{dy} + u^2 = 0$$

$$y\frac{du}{dy} = -u \quad \text{sep}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{-dy}{y}$$

$$\ln u = -\ln y + c$$

$$u = \frac{c}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{y} \quad \text{sep}$$

$$y\,dy = c\,dx \Rightarrow y^2/2 = cx + c_1$$

$$y^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ y_1}}{cx} + \underset{\substack{\uparrow \\ y_2}}{c_1}$$

Consider $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

*كالأغلب، بيجي عليه سؤال بالإمتحانات بعطيك الحل الأول وانت بتجيب الحل الثاني، الفكرة قانون وعوّض *

Given y_1, we can find y_2 as follows $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$

ex $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$ find y_2??

$$y_2 = e^{2x} \int \frac{e^{-\int 4 dx}}{(e^{2x})^2} dx = e^{2x} \int \frac{\cancel{e^{4x}}}{\cancel{e^{4x}}} dx$$

$$= x e^{2x}$$

2.2 Homo. linear. O.D.E with constant coefficients.

$ay'' + by' + cy = 0$ --- ⊛

the sol. $y = e^{rx}$

$\underbrace{ar^2 + br + c = 0}_{\text{Characteristic eq.}}$ quadratic eq.

1) $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ there are 2-distinct sol's

$r_1 \neq r_2$

then the sol of ⊛ $\Rightarrow$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2) $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ has only one sol

$r_1 = r_2 = r$

then the sol of ⊛ $\Rightarrow$

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

3) $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ has complex Roots, $r = \lambda \mp i\mu$

* Real part *
* imaginary part *

the sol of ⊛ $\Rightarrow$

$$y = c_1 e^{\lambda x} \cos \mu x + c_2 e^{\lambda x} \sin \mu x$$

$\boxed{1}$ Two distinct Roots, $r_1 \neq r_2$

ex $y'' - 2y' - 3y = 0$

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$(r+1)(r-3) = 0$

$r = -1, 3$

$\text{fund}_{\text{sol}} = \{e^{-x}, e^{3x}\}$

$y_g = \underset{y_1}{C_1 e^{-x}} + \underset{y_2}{C_2 e^{3x}}$

---

ex $y'' + y' = 0$

$r^2 + r = 0$

$r(r+1) = 0 \implies r = 0, -1$

$y_g = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x}$

$= C_1 + C_2 e^{-x}$

$\text{fund}_{\text{sol}} = \{1, e^{-x}\}$

$\boxed{2}$ Equal Roots, $r_1 = r_2 = r$

ex $2y'' - 12y' + 18y = 0$

$2r^2 - 12r + 18 = 0$

$r^2 - 6r + 9 = 0$

$(r-3)(r-3) = 0$

$r = 3, 3$

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

$\text{Fund}_{\text{sol}} = \{e^{3x}, xe^{3x}\}$

---

ex Find the O.D.E which has the sol: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

$r = -2, 3$

$r = -2 \quad r = 3$

$(r+2)(r-3) = 0$

$r^2 + 2r - 3r - 6 = 0$

$r^2 + r - 6 = 0$

$y'' - y' - 6y = 0$

ex Find O.D.E which has the sol: $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$

$r = 2, 2$

$(r-2)^2 = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$y'' - 4y' + 4y = 0$

Complex (مراجعة قبل الدخول إلى مثال الـ Complex)

$r \in \mathbb{C}$

$r = \lambda \mp i\mu$

real part ← λ ; μ → imaginary part

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1 \quad , \quad \frac{1}{i} = -i$

$e^{(\lambda + i\mu)x}$

$e^{\lambda x + i\mu x} = e^{\lambda x} e^{i\mu x} = e^{\lambda x}[\cos\mu x - i\sin\mu x)$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Euler formula

3 Complex Roots:

ex $y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r = \mp\sqrt{-1} = \underbrace{\mp i}$ → pure imaginary, real part equal zero

$y = c_1 e^{0x}\cos x + c_2 e^{0x}\sin x$

$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$

ex $2y'' + 2y' + 4y = 0$

$2r^2 + 2r + 4 = 0$

$r^2 + r + 2 = 0$

$\frac{-1 \mp \sqrt{1-4(2)}}{2} = \frac{-1 \mp i\sqrt{7}}{2}$ Complex

$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$

ex $y'' + 9y = 0 \ , \ y(0) = 1$

$y'(0) = 3$

5

$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \mp 3i$

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$1 = C_1 \overset{1}{\cancel{\cos 0}} + C_2 \overset{0}{\cancel{\sin 0}}$

$\boxed{1 = C_1}$

$y' = -3\overset{1}{\cancel{C_1}} \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$

$3 = -3\overset{1}{\cancel{C_1}} \overset{0}{\cancel{\sin 0}} + 3C_2 \overset{1}{\cancel{\cos 0}}$

$3 = 3C_2$

$\boxed{C_2 = 1}$

$* \ y = \cos 3x + \sin 3x \ *$

ex Find the 2^{nd} O.D.E which has the sol

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$r = 2i, -2i$

$(r - 2i)(r + 2i) = 0$

$r^2 + 2ir - 2ir + 4 = 0$

$r^2 + 4 = 0$

$y'' + 4y = 0$

2.5 Cauchy Euler O.D.E

*حفظ مؤقتاً" ستشرح الصيغة الكاملة والتي تستخدم لأكثر من y'' أي y''' و $y^{(4)}$ في ch3 *

$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ C.E.E

* أس الـ x مساوي لرقم المشتقة المضروب بها *

$ar(r-1) + br + c = 0$

أو

$ar^2 + (b-a)r + c = 0$, sol: $y = x^r$

Case I: $r_1 \neq r_2 \Rightarrow y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$

Case II: $r_1 = r_2 = r \Rightarrow y = C_1 x^r + C_2 \ln x \cdot x^r$

Case III: $r = \lambda \mp i\mu \Rightarrow y = C_1 x^{\lambda} \cos(\mu \ln x) + C_2 x^{\lambda} \sin(\mu \ln x)$

ex

① $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ C.E.E

$2r(r-1) + 3r - 1 = 0$

$2r^2 - 2r + 3r - 1 = 0$

$2r^2 + r - 1 = 0$

$$\frac{-1 \mp \sqrt{1-4(2)(-1)}}{4}$$

$$= \frac{-1 \mp 3}{4} \quad \frac{-1-3}{4} = -1 \quad \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

$y = C_1x^{-1} + C_2x^{\frac{1}{2}}$ ✓

② $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ C.E.E

$r(r-1) - 3r + 4 = 0$

$r^2 - r - 3r + 4 = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$r = 2,2$, $y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$

③ $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$ C.E.E

$r(r-1) + 7r + 13 = 0$

$r^2 - r + 7r + 13 = 0$

$r^2 + 6r + 13 = 0$

$$\frac{-6 \mp \sqrt{36-4(13)}}{2}$$

$$= \frac{-6 \mp 4i}{2} \quad \frac{-6-4i}{2} = \boxed{-3-2i} \quad \frac{-6+4i}{2} = \boxed{-3+2i}$$

$y = C_1x^{-3}\cos(2\ln x) + C_2x^{-3}\sin(2\ln x)$

④ $xy'' + 2y' = 0$ * ضرب المعادلة بـ x *

$x^2y'' + 2xy' = 0$ * تحولت لـ C.E.E ، أفضل

من استخدام ال y-missing *

$r(r-1) + 2r = r^2 - r + 2r = 0$

$r^2 + r = 0$, $r = 0, -1$

$y = C_1x^0 + C_2x^{-1} = C_1 + C_2x^{-1}$

ex

C.E.E

$x^2y'' + xy' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$

$r(r-1) + r + 1 = 0$

$r^2 - r + r + 1 = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r = \mp i$

$y = C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x$

$1 = C_1\overset{1}{\cancel{\cos\ln 1}} + \overset{0}{\cancel{C_2\sin\ln 1}}$

$\boxed{1 = C_1}$

$y' = \frac{-\overset{1}{\cancel{C_1}}}{x}\sin\ln x + \frac{C_2}{x}\cos\ln x$

$1 = C_2\overset{1}{\cancel{\cos\ln 1}}$

$\boxed{1 = C_2}$

ex Find the O.D.E

which has the sol.

$y = C_1 x^3 + C_2 x^2$

$r = 2, 3$

$(r-2)(r-3) = 0$

$r^2 - 2r - 3r + 6 = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$r^2 - r - 4r + 6 = 0$

$r(r-1) - 4r + 6 = 0$

$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

---

ex Find 2^{nd} O.D.E which

has the sol.

$y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln x \quad r = 3, 3$

$(r-3)(r-3) = 0 \, , \, r^2 - 6r + 9 = 0$

$r^2 - r - 5r + 9 = 0$

$r(r-1) - 5r + 9 = 0$

$x^2 y'' - 5y' + 9y = 0$

Wronskian:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$W = 0 \Rightarrow y_1, y_2$ are linear dep

$W \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ are linear indep

ex T or F justify

$W[y_1, y_2] = 4$

Then y_1, y_2 are

linear dep.

F, linear Indep, $W \neq 0$

ex ① x^2, x^3

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} =$$

$3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot x^3$

$3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$

Linear Indep

② $\cosh x, \sinh x$

$$W = \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{vmatrix}$$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$1 \neq 0$, Linear Indep

2.7 Non-homo. O.D.E.

$a(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

$f(x) = 0$ homo

$f(x) \neq 0$ Non-homo

The sol. when $f(x) \neq 0$

step 1 $\Rightarrow y_h \Rightarrow a(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

- Red.
- constant coeff. $y = e^{rx}$
- C.E.E $y = x^r$

homogenous solution

step 2 $\Rightarrow y_p$

particular solution

طريقة 1 Method of undetermined coeff

أسهل من الطريقة الثانية

تستخدم فقط عندما يكون معاملات y'' ,y' ,y ثوابت

طريقة 2 Variation of parameter.

نستخدم فيها wronskian

أشمل وأعم من الطريقة الأولى

Method of undetermined Coff

* حفظ * ⇓	⇓
* لإيجاد الy_p * $f(x)$	y_p
$ke^{\gamma x}$	$Ae^{\gamma x}$
kx^n *poly*	$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$
x^2	$a_2x^2+a_1x+a_0$
x^3	$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
$k\sin wx$ $k\cos wx$	$A\cos wx+B\sin wx$
$ke^{\gamma x}\cos wx$ $ke^{\gamma x}\sin wx$	$Ae^{\gamma x}\cos wx+Be^{\gamma x}\sin wx$

* اذا وجدت أنّ $f(x)$ في المعادلة غير الأشكال الموجودة فوق فإن المسألة تحل على الطريقة الثانية *

* حل المعادلة وكأنها homo بجعل $f(x)=0$ *

$$y_g = y_h + y_p$$

حل المعادلة

* إستخدام $f(x)$ للإيجاد ال y_p ثم الإشتقاق للإيجاد قيم الثوابت *

---

ex $y''-y=2x^2+1$

* $f(x)$ is poly ⇒ y_p = poly, $kx^n \Rightarrow n=2$, $y_p=a_2x^2+a_1x+a_0$ *

$\boxed{1}$ $y_h \Rightarrow y''-y=0$ * نحلها كما تعلمنا سابقاً *

$r^2-1=0$

$r=-1,1$

$y_h=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

$\boxed{2}$ $y_p \Rightarrow y_p=a_2x^2+a_1x+a_0$

* نلاحظ أن حل الy_h يختلف عن حل ال y_p ولذلك لن يكون هناك خطوة إضافية، سنشرحها في الأمثلة القادمة *

$y_p'=2a_2x+a_1$

$y_p''=2a_2$

* بالتعويض بالمعادلة *

$2a_2-(a_2x^2+a_1x+a_0)=2x^2+1$

$-a_2x^2-a_1x+2a_2-a_0=2x^2+1$

* نساوي معامل (x^2 يمين مع x^2 يسار) و معامل (x يمين مع x يسار) و الثابت مع الثابت يسار من اليمين *

$-a_2=2 \Rightarrow a_2=-2$ | $2\overset{-2}{a_2}-a_0=1$

$-a_1=0 \Rightarrow a_1=0$ | $a_0=-5$

$y_g=y_h+y_p \Rightarrow y_g=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-2x^2-5$

ex $y'' + y = 2e^{3x}$

① $y_h \Rightarrow y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r = \mp i$

$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

② $y_p = Ae^{3x}$

$y'_p = 3Ae^{3x}$

$y''_p = 9Ae^{3x}$

$9Ae^{3x} + Ae^{3x} = 2e^{3x}$

$10A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

③ $y_g = y_h + y_p$ * عليها علامة *

$y_g = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{5}e^{3x}$

* ممكن في الامتحان يطلب منك إيجاد الـ y_p فقط بمعنى آخر ايجاد الـ form للـ y_p فقط حينها عليك إيجاد الـ y_h أولاً *

---

ex $y'' - 4y = 2\sin x$

① $y_h \Rightarrow r^2 - 4 = 0$

$r = -2, 2$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

② $y_p = A\sin x + B\cos x$

$y'_p = A\cos x - B\sin x$

$y''_p = -A\sin x - B\cos x$

$-A\sin x - B\cos x - 4A\sin x - 4B\cos x$

$= 2\sin x$

$-5A\sin x - 5B\cos x = 2\sin x$

* نساوي معامل (sinx يسار مع sinx يمين)

* ومعامل (cosx يسار مع cosx يمين)

$-5A = 2 \Rightarrow A = \frac{-2}{5}$

$-5B = 0 \Rightarrow B = 0$

⑨ $y_g = y_h + y_p$

$y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}\sin x$

---

ex $y'' - y = 2e^{x}$

① $y_h \Rightarrow r^2 - 1 = 0$

$r = -1, 1$

$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

② $y_p = \underbrace{Ae^{x}} \cdot x$

* لو هذا الحل موجود في الـ y_h لذا يجب ضربه بـ x ثم التحقق من ان الناتج غير مكرر في الـ y_h واذا كان مكرر اضربه بـ x مرة أخرى، وهكذا حتى ينتهي التكرار في الـ y_h *

$y'_p = Ae^{x} + Axe^{x}$

$y''_p = Ae^{x} + Ae^{x} + Axe^{x}$

$= 2Ae^{x} + Axe^{x}$

$2Ae^{x} + \cancel{Axe^{x}} - \cancel{Ae^{x}x} = 2e^{x}$

$2A = 2 \Rightarrow A = 1$

③ $y_g = y_h + y_p$

$y_g = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + xe^{x}$

ex Determine the form of particular sol Don't solve

① $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}\sin x$

$y_h \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-1)(r-2) = 0$

$r = 1, 2$

$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

$y_p = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$

* تذكير *

$$\overset{*F(x)*}{}\qquad\qquad\qquad *y_p*$$

$$\left.\begin{matrix} Ke^{rx}\sin wx \\ Ke^{rx}\cos wx \end{matrix}\right] \rightarrow e^{rx}(A\cos wx + B\sin wx)$$

* إضافة *

$$\left.\begin{matrix} Ke^{rx}x^{n}\cos wx \\ Ke^{rx}x^{n}\sin wx \end{matrix}\right] \rightarrow \begin{matrix} e^{rx}(a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\cos wx \\ + \\ e^{rx}(b_n x^{n} + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\sin wx \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} Kx^{n}\cos wx \\ Kx^{n}\sin wx \end{matrix}\right] \rightarrow (a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\cos wx + (b_n x^{n} + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0)\sin wx$$

② $y'' + 2y' = \underbrace{x^4 - 2x^3 + 1}_{} + \underbrace{x^2 e^{-2x}}_{} + \underline{\underline{\cos 2x}}$

$y_h \Rightarrow r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r+2) = 0,\ r = -2, 0$

$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-2x} = C_1 + C_2 e^{-2x}$

* عند التوزيع $b_0 e^{-2x}$ ينتج وهو مكرر في y_h فضربنا بـ x *

$y_p = (a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + \underline{a_0}) \cdot x$ * مكرر في y_h فضربنا بـ x *

$+ e^{-2x}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \cdot x + A\cos 2x + B\sin 2x$

③ $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + 5e^{-x}\sin x + x^2 e^{-x}\sin x$

$y_h \Rightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$

$r = \dfrac{-2 \mp \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \mp 2i}{2} = -1 \mp i$

$y_h = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$

$y_p = Ae^{-x} + e^{-x}(A_1\cos x + A_2\sin x) \cdot x$

$+ e^{-x}((a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\cos x + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)\sin x) \cdot x$

* لم نأخذ هنا الشكل لكن أستطيع كتابته بطريقة أخرى *

④ $8y'' - 6y' + y = 6\underbrace{\cosh x}_{}$

$8y'' - 6y' + y = 6\left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)$

$8y'' - 6y' + y = 3e^{x} + 3e^{-x}$

$y_h \Rightarrow 8r^2 - 6r + 1 = 0$

$r = \dfrac{+6 \mp \sqrt{36 - 4(8)}}{2(8)}$ ⟨ $\dfrac{6+2}{16} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{6-2}{16} = \dfrac{1}{4}$ ⟩ $r = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$

$y_h = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

$y_p = Ae^{x} + Be^{-x}$

2.10 solution by variation of parameters

* عند الحل بهذه الطريقة فإنك لن تحتاج لضرب الـ yp الناتج بشيء لأنه سيكون دائماً مختلف عن الـ y_h *

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

① $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

② $w[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$= y_1 y_2' - y_2 y_1'$

* حفظ مؤقت الصيغة ، التكامل للقانون ستؤخذ في ch3 *

③ $y_p = -y_1 \int \frac{y_2 \, r(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{y_1 \, r(x)}{w} dx$

* عند أخذ r(x) يجب التأكد من أن معامل y'' يساوي 1 *

* حل المعادلة وكأنها homo يجعلها تساوي 0 *

④ $y_g = y_h + y_p$

* حل المعادلة *

* إستخدام wronskian لإيجاد yp

ex $y'' + y = \sec x$

① $y_h \Rightarrow r^2 + 1 = 0$

$r = \mp i$

$y_h = C_1 \underset{y_1}{\cos x} + C_2 \underset{y_2}{\sin x}$

② $W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

③ $y_p = -\cos x \int \frac{\sin x \sec x}{1} dx + \sin x \int \frac{\cos x \sec x}{1} dx$

$y_p = -\cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \sin x \int 1 \, dx$

$y_p = \cos x \ln \cos x + x \cdot \sin x$

ex $x^2y'' - 4xy' + 6y = 21x^{-4}$

① $y_h \Rightarrow x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ C.E.E

$r(r-1) - 4r + 6 = 0$

$r^2 - r - 4r + 6 = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$(r-2)(r-3) = 0$

$r = 2, 3$

$$y_h = C_1 \underset{\substack{\uparrow \\ y_1}}{x^2} + C_2 \underset{\substack{\uparrow \\ y_2}}{x^3}$$

② $w = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}$

$= 3x^4 - 2x^4$

$= x^4$

③ $y_p = -x^2 \int \frac{x^3 \cdot 21x^{-6}}{x^4} dx + x^3 \int \frac{x^2 \cdot 21x^{-6}}{x^4} dx$

* $r(x)$ في هذه الحالة يساوي $21x^{-6}$ لجعل معامل y'' يساوي 1 *

$y_p = -x^2 \int 21x^{-7} dx + x^3 \int 21x^{-8} dx$

$y_p = -x^2 \frac{21x^{-6}}{-6} + x^3 \frac{21x^{-7}}{-7}$

$y_p = \frac{21}{6} x^{-4} - \frac{21}{7} x^{-4}$

$y_p = \frac{1}{2} x^{-4}$

$y_g = y_h + y_p$

$y_g = C_1x^2 + C_2x^3 + \frac{1}{2}x^{-4}$

ch 2 Done

Ch3 Higher order Linear O.D.E

* في ch2 كانت الـ characteristic equation الناتجة تربيعية ودائماً لها 2 roots هنا سينتج أكثر من 2 roots والأمثلة القادمة ستركز كيفية التعامل معها *

3.1 / 3.2 Homo Linear O.D.E

ex Solve:

① $y^{(4)} - y = 0$

*رقم المشتقة وليس أس *

sol

$r^4 - 1 = 0$

$(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$

$r = -1, 1, \mp i$

different 2 roots

complex

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

② $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$

sol

$r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2 = 0$

$r^2(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0$

$r^2((r^3 - 1) - 3r^2 + 3r) = 0$

$r^2((r-1)(r^2 + r + 1) - 3r(r-1)) = 0$

$r^2 (r-1)(r^2 + r + 1 - 3r) = 0$

$r^2(r-1)(r^2 - 2r + 1) = 0$

$r^2(r-1)(r-1)(r-1) = 0$

* $r = 0,0$ ، $r ✗ 0$ ، $r^2 = 0$ *

$r = 0, 0, 1, 1, 1$

repeat

repeat

$y = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{x} + C_4 x e^{x} + C_5 x^2 e^{x}$

* تم الضرب بـ x لأنه مكرر مرة *

* تم الضرب بـ x للمكرر أول مرة وبـ x^2 للمكرر ثاني مرة *

$= C_1 + C_2 x + C_3 e^{x} + C_4 x e^{x} + C_5 x^2 e^{x}$

③ $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

sol

$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$(r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0$

$r = \mp i , \mp i$

* repeat

* complex

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$

* للـ $i\mp$ الأولى *

* للـ $i\mp$ الثانية ضربنا بـ x لأن $i+$ تكررت والـ $i-$ تكررت أيضاً *

④ $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0$

* هذه C.E.E لأن أس الـ X مساوي لرقم المشتقة المضروب بها *

$r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6r - 6 = 0$

* كيف أتينا بهذه المعادلة مشروحة خلف الورقة *

$r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6(r-1) = 0$

* سحب (r-1) كعامل مشترك *

$(r-1)(r(r-2) - \underbrace{3r + 6}_{= -3(r-2)}) = 0$

* سحب (r-2) كعامل مشترك *

$(r-1)(r-2)(r-3) = 0 , \; r = 1, 2, 3$

* لو ظهر عندي مكرر في حل الـ C.E.E فإني أقوم بالضرب بـ lnx بدلاً من x للمكرر أول مرة وبـ $\ln^2 x$ بدلاً من x^2 للمكرر ثاني مرة وهكذا *

$y_h = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$

* لا يوجد repeat لذا لم نضرب بـ lnx نهائياً *

C.E.E

الأس *المشتقة*

$$a_n x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

لاحظ رقم المشتقة مساوي لأس x المضروب بها

$$a_n r(r-1) \text{----} (r-(n-1)) + \dots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

توضيح

ex *مثال توضيحي*

$$3x^4 y^{(4)} + 2x^3 y^{(3)} + x^2 y'' + 7xy' + 4y = 0$$

حتى تصل إلى المشتقة رقم 0 عندها ضع الثابت فقط

نزله الثابت وقم بالطرح من الـ0 حتى تصل الى اقل من رقم المشتقة بدرجة

$$3(r-0)(r-1)(r-2)\underline{(r-3)} + 2(r-0)(r-1)\underline{(r-2)} + (r-0)\underline{(r-1)} + 7\underline{(r-0)} + 4 = 0$$

رقم المشتقة 4 لذا توقف عند 4-1=3

رقم المشتقة 3 لذا توقف عند 3-1=2

رقم المشتقة 2 لذا توقف عند 2-1=1

رقم المشتقة 1 لذا توقف عند 1-1=0

$$3r(r-1)(r-2)(r-3) + 2r(r-1)(r-2) + r(r-1) + 7r + 4 = 0$$

ex *تذكير*

$$2x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

$$2(r-0)(r-1) + 3(r-0) + 1 = 0$$

$$2r(r-1) + 3r + 1 = 0$$

هكذا كنا نحصل عليها في Ch2

ex Find the Linear homo O.D.E which has the following sol:

1. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$r = 1 \,,\, -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$(r-1)\left(r-\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(r-\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = 0$

$(r-1)\left(r^2 - r\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - r\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = 0$

$(r-1)(r^2 + r + 1) = 0$

$r^3 + \cancel{r^2} + \cancel{r} - \cancel{r^2} - \cancel{r} - 1 = 0$

$r^3 - 1 = 0$

$y''' - y = 0$

2. $y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x \ln^2 x$

* $r=1$ وهو مكرر مرتين لأننا ضربنا بـ $\ln x$ المكرر أول مرة وبـ $\ln^2 x$ للمكرر ثاني مرة *

$r = 1, 1, 1$

$(r-1)(r-1)(r-1) = 0 \Rightarrow (r^2-2r+1)(r-1) = 0$

يجب كتابتها على صيغة C.E.E

$(r(r-2)+1)(r-1) = 0 \Rightarrow r(r-1)(r-2) + r - 1 = 0$

$x^3 y''' + x y' - y = 0$

* تذكير

constant coefficient ← e^{x}

*C.E.E ← x^{r}

3.3 Non-homo linear O.D.E

$P_n(x) y^{n} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots P_1(x) y' + P_0 y = r(x)$

$r = 0$ homo

$r \neq 0$ non homo

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$

y_p → undetermined Method → variation of parameter

ex $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^x + \sin x$

Find the form of particular sol. using (undetermined Method).

$y_h \Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$

$(r^3 - 1) - 3r(r-1) = 0$

$(r-1)(r^2+r+1) - 3r(r-1) = 0$

$(r-1)(r^2+r+1-3r) = 0$

$(r-1)(r^2-2r+1) = 0$

$(r-1)(r-1)(r-1) = 0$

$r = 1, 1, 1$

$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

$y_p = e^x(a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0)\boxed{x \cdot x \cdot x}$

$+ A\sin x + B\cos x$

$y_g = y_h + y_p$

* عند إستخدام طريقة ال undetermind method يجب أن تكون معاملات المشتقات وال y في المعادلة ثوابت وال pure function of x من ال F(x) التي حفظنا أشكالهم في ch2 لكي نحصل على ال yp *

* أي أن الحل لم يفرق كثير عن ch2 لكن الفرق الوحيد هو أن المعادلة الناتجة سينتج عنها أكثر من 2 roots وتعلمنا كيف نعالج هذه المشكلة بالضرب بعدد التكرار. انتهى *

* بالنسبة لل yp أيضاً يجب التأكد من عدم وجود تكرار في ال yh أيضاً وإلا وجب الضرب بـ x بعدد التكرار *

ex write the suitable form for particular sol. if the undetermined coff. method is used.

$y''' + y' = 1 + 2x + \cos x$

$y_h \Rightarrow r^3 + r = 0$

$r(r^2+1) = 0 \ , \ r = 0, \mp i$

$y_h = C_1 \overset{1}{\cancel{e^{0x}}} + C_2\cos x + C_3 \sin x$

$y_p = (a_1 x + a_0) \cdot x + (A\cos x + B\sin x) \cdot x$

---

ex Find

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{1} & \overset{-}{1} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

row $(-1)^{1+1}$ column $= +$

row $(-1)^{1+2}$ column $= -$

row $(-1)^{2+3}$ column $= -$

column row $(-1)^{3+3} = +$

$= 1(1-0) - 2(1-1) + 0(D-1)$

$= 1$

ex Find $\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} & e^{2x} \\ e^{x} & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{x} & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix}$

$$\underline{e^{x}} \cdot \underline{e^{-x}} \cdot \underline{e^{2x}} \begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{1} & \overset{+}{1} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

* سحبنا عامل مشترك من العمود 1 *

* سحبنا عامل مشترك من العمود 2 *

* سحبنا عامل مشترك من العمود 3 *

$$e^{2x}\left[1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$e^{2x}\big((-4-2)-(4-2)+(1+1)\big) = -6e^{2x}$$

Variation of parameter

ex Solve:

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 25x^5$$

$\boxed{1}$ $y_h \Rightarrow x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ C.E.E

$$r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + \underbrace{6r-6}_{=6(r-1)} = 0$$

$$(r-1)\big(\underbrace{r(r-2) - 3r + 6}_{=-3(r-2)}\big) = 0$$

$$(r-1)(r-2)(r-3) = 0$$

$$r = 1, 2, 3$$

$$y_h = C_1 \underset{\substack{\uparrow \\ y_1}}{x} + C_2 \underset{\substack{\uparrow \\ y_2}}{x^2} + C_3 \underset{\substack{\uparrow \\ y_3}}{x^3}$$

$\boxed{2}$ $y_p = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \frac{w_i\, r(x)}{w}\, dx$

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1\, r(x)}{w}\, dx + y_2 \int \frac{w_2\, r(x)}{w}\, dx + y_3 \int \frac{w_3\, r(x)}{w}\, dx$$

* في ch2 حفظنا الصيغة بشكل مؤقت *

* في حالة الـ 2nd كانت تظهر لنا حين y_1 , y_2 لكن عندها يكون $-y_2 = w_1$ و $y_1 = w_2$ *

* لم نعرف إيجادها في ch2 *

$r(x)$ و (w) و

* شرحنا كيف نحصل عليها لن نفرق كثير عن ch2 *

* الآن نحن في ch3 وستكون الحلول كثيرة لذا سنضطر لإيجاد w_1, w_2, w_3, ---, w_n و ولإيجادهم نتبع الآتي

الشرح الكامل *

① $w[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$

نختار الصف أو العمود الذي يحوي على 0 أكثر لحل أسهل

$$w[x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} \overset{+}{x} & x^2 & x^3 \\ \overset{-}{1} & 2x & 3x^2 \\ \overset{+}{0} & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

$$x\begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} + 0\cancel{\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}}$$

$$x(12x^2 - 6x^2) - 1(6x^3 - 2x^3)$$

$$x(6x^2) - 1(4x^3) = 6x^3 - 4x^3 = 2x^3$$

* حاصل أكبر مشتقة لازم يساوي 1 *

② $r(x) = \dfrac{25x^5}{x^3} = 25x^2$

نختار الصف أو العمود الذي يحوي على 0 أكثر لحل أسهل

③ $W_1 = \begin{vmatrix} \overset{+}{0} & x^2 & x^3 \\ \overset{-}{0} & 2x & 3x^2 \\ \overset{+}{1} & 2 & 6x \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}$

لإيجاد wronskian 1 إذهب إلى wronskian الأصلية وبدّل العمود الأول بـ 0 عدا آخر عنصر منه بدّله بـ 1

$$= 3x^4 - 2x^4 = x^4$$

$W_2 = \begin{vmatrix} x & \overset{-}{0} & x^3 \\ 1 & \overset{+}{0} & 3x^2 \\ 0 & \overset{-}{1} & 6x \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix}$

لإيجادها قمنا بعمل نفس الخطوات لإيجاد W_1 لكن الفرق هنا، اخترنا العمود الثاني

$$= -(3x^3 - x^3) = -2x^3$$

$W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & \overset{+}{0} \\ 1 & 2x & \overset{-}{0} \\ 0 & 2 & \overset{+}{1} \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$

لإيجادها قمنا بعمل نفس الخطوات لإيجاد W_1 لكن الفرق هنا، اخترنا العمود الثالث

$$= 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$y_p = x\int \frac{x^4 \cdot 25x^2}{2x^3}\,dx + x^2\int \frac{-2x^3 \cdot 25x^2}{2x^3}\,dx$$

$$+ x^3\int \frac{x^2 \cdot 25x^2}{2x^3}\,dx$$

$$y_p = x\int \frac{25x^3}{2}\,dx + x^2\int \frac{-25x^2}{1}\,dx + x^3\int \frac{25x}{2}\,dx$$

$$y_p = x\ \frac{25x^4}{8} + x^2\,\frac{-25x^3}{3} + x^3\,\frac{25x^2}{4}$$

$$y_p = x^5\left(\frac{25}{8} - \frac{25}{3} + \frac{25}{4}\right) = \frac{25}{24}x^5$$

Scanned by CamScanner

ex Solve:

$y''' + y' = \sec x$

* شكل لم نأخذه لذا نحل باستخدام الـ variation *

1. $y_h \Rightarrow r^3 + r = 0$

$r(r^2+1) = 0$

$r = 0, \mp i$

$$y_h = \underset{\substack{\uparrow \\ y_1}}{C_1 x^0} + \underset{\substack{\uparrow \\ y_2}}{C_2 \cos x} + \underset{\substack{\uparrow \\ y_3}}{C_3 \sin x}$$

2. $y_p = y_1 \int \frac{w_1 r(x)}{w} dx + y_2 \int \frac{w_1 r(x)}{w} dx$

$+ y_3 \int \frac{w_3 r(x)}{w} dx$

① $w[1, \cos x, \sin x] = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}$

$= 1 \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

② $r(x) = \sec x$

③ $w_1 = \begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \cos x & \sin x \\ \overset{-}{0} & -\sin x & \cos x \\ \overset{+}{1} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \end{vmatrix}$

$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$w_2 = \begin{vmatrix} 1 & \overset{-}{0} & \sin x \\ 0 & \overset{+}{0} & \cos x \\ 0 & \overset{-}{1} & -\sin x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = -\cos x$

$w_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \overset{+}{0} \\ 0 & -\sin x & \overset{-}{0} \\ 0 & -\cos x & \overset{+}{1} \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ 0 & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x$

$y_p = 1 \int \frac{1 \sec x}{1} dx + \cos x \int \frac{-\cos x \cdot \sec x}{1} dx + \sin x \int \frac{-\sin x \sec x}{1} dx$

$y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \sin x \ln \cos x$

ex Find linear 2^{nd} O.D.E with constant Coefficients for which $y_1 = 1$, $y_2 = \bar{e}^{x}$ are sol. of associated homo eq and $y_p = \frac{1}{2}x^2 - x$ is particular sol. of non-homo

$y_h \Rightarrow r = 0, -1 \Rightarrow r(r+1) = 0 \Rightarrow r^2 + r = 0$

$y'' + y' = 0$ homo O.D.E

$y'' + y' = f(x)$ * بما أن y_p حل فهو يحقق المعادلة $\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}x^2 - x$

$\hookrightarrow$ non-homo part

$y_p' = x - 1$

$y_p'' = 1$

$1 + x - 1 = f(x)$

$x = f(x)$

$y'' + y' = x$

Ch. 3 Done

Ch 7 Matrices

① Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \text{----} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \text{----} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \text{----} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix}$$

* نرمز للـ Matrix بحرف capital وللعناصر التي بالداخل بنفس الحرف لكن بالـ small منه وثم يتبع ذلك الحرف الـ small رقم الـ row ثم رقم الـ column*

* أية Matrix تملك order → order = $n \times m$

number of rows

number of columns

② Basic operations

[1] Scalar Multiplication

ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Find $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $-\frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

* إذهب لكل عنصر واضربه بـ 2 *

* إذهب لكل عنصر واضربه بـ -1/3 *

[2] addition

* لجمع الـ Matrices مع بعضها يجب أن تملك نفس الـ order*

ex let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times1}$

Find $A + B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

*بما أن لهما نفس الـ order فيمكنني جمعهم لكن لاحظ ان عملية الجمع ستكون عنصر مع عنصر، أي a_{11} مع b_{11} و a_{12} مع b_{12} و a_{21} مع b_{21} و a_{22} مع b_{22} *

$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

بما أن لهما نفس الـ order فيمكنني طرحهم لكن لاحظ ان العملية ستكون أيضاً عنصر مع عنصر كما فعلنا مع الجمع

$*B - A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}*$

$A + C =$ undefined

* لاحظ ان كلا الـ A والـ C لا يملكان نفس الـ order*

$*A - C =$ undefined*

3 Multiplication

* ضرب Matrix مع Matrix أخرى *

* لكي أستطيع ضرب Matrix مع Matrix أخرى هناك شرط يجب أن يتحقق أولاً *

$$AB = [\ ?\ ]$$

* بإفتراض ان A و B Matrices وأريد ضربهم فيجب أن يكون *

number of columns of A = number of rows of B

ex Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times1}$

Find

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+2*2 \\ 3*1+4*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

* لاحظ ان عدد الcolumns لدى A = 2
ولاحظ أيضاً ان عدد الrows
لدى B = 2، إذن يمكنني الضرب *

* لاحظ ان الMatrix الناتجة يكون الorder
لها عدد الcolumns لـB X عدد الrows
لـA *

$$BA = \text{undefined}$$

* لاحظ ان عدد الcolumns
لدى B = 1 وعدد الrows
لدى A = 2، إذن لا يمكنني
الضرب *

$$AB \neq BA$$

* ليس من الضرورة أن تكون
عملية الضرب تبديلية عند
ضرب Matrix مع أخرى *

ex Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

* لاحظ أن عدد
الcolumns لدى A = 2
وعدد الrows لدى
B = 2، إذن يمكنني الضرب *

Find

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1*1+2*0 & 1*1+2*2 & 1*-1+2*-1 \\ -1*1+-3*0 & -1*1+-3*2 & -1*-1+-3*-1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

* لاحظ أن BA undefined وذلك لأن
عدد الcolumns لدى B = 3
وعدد الrows لدى A = 2 *

* لاحظ ان الorder لهذه الMatrix الناتجة
هو عدد الColumns لـB X عدد الrows لـA *

* هذا السؤال يأتي في الامتحان ويكون عليه
علامتان وهو كالآتي *

ex

let $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{4\times5}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 15 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 20 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 7 & 12 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\times7}$

* لاحظ أن عملية
الضرب ممكنة *
* لو كانت BA
فإن عملية الضرب غير
ممكنة *

If $C = AB$،

Find C_{46} → 4th row of A
→ 6th column of B

* تسمى row vector *

$$C_{46} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4+1+1+6+0$$

$$= 12$$

* تسمى column vector *

* إذا طلب منك
الorder لـC فيكون
4X7 *

[4] Transpose of a Matrix

* هي عبارة عن تحويل كل صف في الـ Matrix إلى عمود أو تحويل كل عمود في الـ Matrix إلى صف *

ex let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Find A^T

Transposition of A.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

③ square Matrix

* هي حالة خاصة من الـ Matrix يكون فيها *

→ Number of rows = Number of columns

* عدد الـ columns و يساوي عدد الـ rows *

the order = n x n

* عدد الـ rows و يساوي عدد الـ columns *

ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_{1\times1}$, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times1}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$F = \begin{bmatrix} 3 & -10 \end{bmatrix}_{1\times2}$

Find The square Matrices

sol A , B , E

* يوجد بعض square Matrices تمتلك خصائص معينة وأولها هي الـ *

[1] Identity Matrix

* خصائص هذه الـ Matrix *

1. nxn Matrix — * هي square Matrix *
2. I_n — * يرمز للـ order برقم واحد مثل I_1 وهي Matrix 1x1 و I_2 وهي Matrix 2x2 *
3. $BI = IB = B$

   * عند ضرب B مع I من نفس الـ order فإن عملية الضرب تكون تبديلية في هذه الحالة والناتج B *
4. Main diagonal ⇒ $i_{ij} = 1 , i = j$; $i_{ij} = 0 , i \neq j$

   * رقم الـ row الذي يوجد به العنصر *

   * رقم الـ column الذي يوجد به العنصر *

* diagonal = القطر *

ex * أمثلة على الـ Identity Matrix

$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ → i_{11}

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ → i_{11}, i_{22}

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → i_{11}, i_{22}, i_{33}

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → i_{11}, i_{22}, i_{33}, i_{44}

2 Diagonal Matrix

* هي عبارة عن square Matrix *
* لكن

$a_{ij} \neq 0 \ , \ i = j$

$a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$

ex

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}_{2\times2}$

a_{11} , a_{22}

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3\times3}$

b_{11} , b_{22} , b_{33}

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}$

C_{11} , C_{22} , C_{33} , C_{44}

3 Triangular Matrix

* هي عبارة عن square Matrix *

* وهي نوعين *

- upper — * المثلث فوق القطر أرقام *
- lower — * المثلث تحت القطر أرقام *

ex $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ upper

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ lower

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ upper

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ lower

4 Inverse of Matrix

1. square Matrix → * يكون لها نفس order لـ A ولـ A^{-1} *
2. $A^{-1}A = I = AA^{-1}$, $A = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$
3. $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} N & -L \\ -M & K \end{bmatrix}$

ex let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, Find

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

If $\det A \neq 0$ then A has Inverse

If $\det A = 0$ then A has no Inverse

ex $2X_1 + X_2 = 4$

$X_1 - X_2 = -1$

* يمكننا إيجاد قيم X_1 و X_2 باستخدام الـ Inverse Matrix *

$AX = B$

X → Variable Matrix

A → Cofficient Matrix

B → constant Matrix

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

* γ لاحظ γ علشان نفس order، لذا $IX \neq XI$ لكن ناتج IX يكون X *

$X = A^{-1}B$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2$

5 adjoint Matrix

* adjoint Matrix هي square Matrix *

* تعلمنا كيف نحصل على الـ Inverse Matrix لـ Matrix 2x2 والآن سنستخدم الـ adjoint Matrix لنحصل على الـ Inverse Matrix لـ Matrix 3x3 *

$$\text{Let } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{adjoint of } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

* عناصر الـ adjoint Matrix تكتب بالـ capital *

* للحصول على عناصر الـ adjoint Matrix *

$$A_{11} = \oplus \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

* حاصل الجمع زوجي *

* حصلنا عليها بالذهاب إلى العنصر a_{11} وحذف الـ row والـ column الموجود فيه *

$$A_{12} = \ominus \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

* حاصل الجمع فردي *

* حصلنا عليها بالذهاب إلى العنصر a_{12} وحذف الـ row والـ column الموجود فيه *

$$A_{13} = \oplus \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

* حاصل الجمع زوجي *

* حصلنا عليها بالذهاب إلى العنصر a_{13} وحذف الـ row والـ column الموجود فيه *

* إستمر بحساب جميع عناصر الـ adjoint Matrix *

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

* بعد أن حصلنا على جميع عناصر الـ adjoint Matrix *

* يمكننا الآن الحصول على الـ Inverse Matrix لـ Matrix A والتي هي Matrix 3x3 *

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[\text{adj}\cdot A\right]^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

ex let $A = \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{2} & \overset{+}{1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Find A^{-1}

① $\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(2-3) - 2(2-1) + 1(3-1)$

$= -1 - 2 + 2 = -1$

② adjoint Matrix

$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = +(2-3) = -1$

$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$

$A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(3-1) = +2$

$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2-1) = +1$

$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1$

$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2-1) = +1$

$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-1) = 0$

$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(1-2) = -1$

$$\text{adJ}.A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

properties of $\det A_{n\times n}$

* تكلمنا عن العديد من ال square Matrices والآن سنتناول خصائص

* ال det معرفه لـ ال square Matrices

① $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

② $\det A^T = \det A$

③ $\det(AB) = \det A \det B$

* أس *

④ $\det(A^{\textcircled{m}}) = (\det A)^m$

* constant *

⑤ $\det(\boxed{K}A) = K^{\textcircled{n}}(\det A)$

* عدد ال rows أو عدد ال columns في ال square Matrix

⑥ Let $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = K_1$

then $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3 & e-3 & f-3 \\ g & h & i \end{vmatrix} = K_1$

* عملية الجمع والطرح على row أو على column لن تؤثر على ال det بشرط أن لا تجعل هذه العملية row أو column يذهب إلى 0*

* فمثلاً لو طرحنا 3 من ال row الثاني فإن ال det لن تتأثر*

⑦ Let $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = K_1$

and B = Multiply the 2nd row of $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ by K

then find det B.

$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ Kd & Ke & Kf \\ g & h & i \end{bmatrix} \Longrightarrow B = \boxed{K} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = K \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = K K_1$

* بإخراج K من ال row الثاني *

⑧ Let $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = K_1$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-)K_1, \quad \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (-)(-)K_1 = K_1$

* إذا قمت بتبديل row مع row آخر أو column مع column آخر فإن ال det تضرب بـ -1 بعدد مرات التبديل *

* قمنا بتبديلين لذا ضربنا بـ -1 مرتين *

⑨ $\det(\text{diagonal Matrix}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

* حاصل ضرب الأعداد الموجودة في القطر *

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\left(\frac{-1}{4}\right)6 = -3$

ex Let $\det(A_{5\times5}) = -4$

$\det(B_{5\times5}) = 2$

$\det(C_{2\times2}) = -3$

Find:

$\boxed{1}$ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-4}$

* det تقرأ *

$\boxed{2}$ $\det(A^{-1}B^{-1}A^{T})$

$= \det A^{-1} \cdot \det B^{-1} \cdot \det A^{T}$

$= \frac{1}{\det A} \cdot \frac{1}{\det B} \cdot \det A$

$= \frac{1}{-4} \cdot \frac{1}{2} \cdot -4$

$= \frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ $\det(C^{T}) = \det C = -3$

$\boxed{4}$ $\det(3C) = 3^{2} \times -3 = -27$

$\boxed{5}$ If . Multiply the 2nd row of A by 3 and the 4th row of B by 2 Find.

$\det(A^{*}B^{*}) = \det A^{*} \det B^{*}$

* تم ضرب ال row
الثاني من A بـ 3 *

* تم ضرب ال row
الرابع من B بـ 2 *

$= 3 \det A \cdot 2 \det B = 3(-4) \cdot 2(2)$

$= -48$

* أخرجنا الـ 3 المضروبة
بالـ row الثاني *

* أخرجنا الـ 2
المضروبة بالـ row الرابع *

$\boxed{6}$
$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} \\ a_{25} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} \\ a_{35} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} \\ a_{45} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} \\ a_{55} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{51} \end{vmatrix}$$

* لاحظ أنه تم التبديل بين
العمود الأول والأخير في A *

$= -\det A$

$= (-)(-4) = 4$

$\boxed{7}$ $\det(C^{3}) = (\det C)^{3} = (-3)^{3} = -27$

* تعلمنا سابقاً كيف نجد حل لـ system معين مكون من معادلتين باستخدام الـ Inverse Matrix، أما الآن فسنستخدم طرق أخرى لحل system معين مكون من أثنين أو من ثلاث معادلات *

① Gauss Elimination

ex

$$x_1 + x_2 - x_3 = 9$$

$$8x_2 + 6x_3 = -6$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 40$$

$$[A : B]$$

* نقوم بتحويل المعادلات إلى هذه الصيغة *

A → Coefficient Matrix

B → constant Matrix

* عند الحل بطريقة Gauss Elimination فإن الناتج سيكون إما unique sol. أو Infinitely Many sol. أو No sol.، وسنشرح كل حالة في مثال *

* عند تحويل المعادلات إلى هذه الصيغة يصبح اسمها *

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -6 & 40 \end{array}\right] \Longrightarrow \text{augmented Matrix}$$

* يجب تحويل كل الأرقام التي تحت القطر إلى 0 *

* الهدف الآن هو التحويل إلى upper triangle *

* سوف نستخدم طريقة نضرب فيها Row معين برقم ونجمعه مع صف آخر مضروب أيضاً برقم فإن أحد الأرقام التي تقع تحت القطر ستصبح صفراً وهكذا حتى أصل إلى هدفي *

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -6 & 40 \end{array}\right]$$

* لاحظ أن هذا الرقم جاهز *

* أبقى هذين الرقمين *

$$2R_1 + R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & \textcircled{6} & -8 & 58 \end{array}\right]$$

* تبقى هذا الرقم *

* لاحظ أنه إذا أتينا بـ R_1 وضربناه بـ 2 ثم جمعناه إلى R_3 فإن -2 التي كانت في R_3 ستصبح 0 *

* لكن عند القيام بهذه العملية فإن التغيير سيطرأ على R_3 كامل *

$$-6R_2 + 8R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -100 & 500 \end{array}\right]$$

upper triangle

* الآن نجد حلول هذه المعادلات *

* لاحظ أنه إذا أتينا بـ R_2 وضربناه بـ -6 ثم جمعناه مع R_3 بعد أن ضربناه بـ 8 فإن الـ 6 التي كانت في R_3 ستصبح 0 *

* لكن عند القيام بهذه العملية فإن التغيير سيطرأ على R_3 كامل *

$$-100X_3 = 500$$

$$\boxed{X_3 = -5}$$

$$8X_2 + 6X_3 = -6 \Rightarrow 8X_2 = 24 \Rightarrow \boxed{X_2 = 3}$$

$$X_1 + X_2 - X_3 = 9 \Rightarrow \boxed{X_1 = 1}$$

* بما أننا أستطعنا إيجاد قيم X_1 و X_2 و X_3 فنقول أن هذا الـ system له unique sol. *

ex

$$\left[\begin{array}{ccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r|ccc:c|} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ R_1+2R_2 \rightarrow & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 2R_1-R_3 \rightarrow & 0 & 8 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc:c|} & 2 & 4 & 1 & 0 \\ & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 4R_2-3R_3 \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

* لاحظ أن R_3 أصبح جميعه 0 بعد التحويل إلى upper triangle لذا الـsystem * has infinitely many sol.

$0X_3=0$

* إذاً أي قيمة لـ X_3 تحقق المعادلة *

$X_3=t \ : \ t \in \mathbb{R}$

$6X_2-3t=0 \Rightarrow X_2=\frac{1}{2}t$

$2X_1+4(\frac{1}{2}t)+t \Rightarrow X=\frac{-3}{2}t$

ex

$$\left[\begin{array}{ccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r|ccc:c|} & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -2R_1+3R_2 \rightarrow & 0 & -1 & 1 & -6 \\ -2R_1+R_3 \rightarrow & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|ccc:c|} & 3 & 2 & 1 & 3 \\ & 0 & -1 & 1 & -6 \\ -2R_2+R_3 \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}$$

* لاحظ أن R_3 أصبح جميعه 0 عدا آخر رقم بعد التحويل إلى upper triangle لذا الـsystem * has no sol.

$0X_3=12$

* إذاً لا يوجد قيمة لـ X_3 سوف تحقق المعادلة *

ex

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 9 & 14 \\ 2 & -4 & a & b \end{array}\right]$$

* يأتي غالباً في الامتحان *

Find the values of a and b such that:

① has unique sol.

② has infinitely many sol.

③ has no. sol

* أولاً قم بالتحويل إلى upper triangle *

$$\begin{array}{r} \\ -3R_1+R_2 \rightarrow \\ -2R_1+R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4+a & -8+b \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 2R_2+R_3 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2+a & -4+b \end{array}\right]$$

① has unique sol.

* لكي يكون لهذا الـ system ، unique sol فإن على معامل X_3 والذي هو $2+a$ أن لا يساوي 0 *

* وأما الـ constant ، $-4+b$ يمكن أن يساوي ما يشاء *

$$2+a \neq 0 \quad \wedge \quad -4+b \in \mathbb{R}$$

* هذه الإشارة تعني and *

$$a \neq -2 \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}$$

② has infinitely many sol

* لكي يكون لهذا الـ system ، infinitely many sol فإن على معامل X_3 والذي هو $2+a$ أن يساوي 0 *

* وأما الـ constant ، $-4+b$ يجب أن يساوي 0 أيضاً *

$$2+a=0 \wedge -4+b=0 \Rightarrow a=-2 \wedge b=4$$

③ has no sol

* لكي يكون لهذا الـ system ، no sol فإن على معامل X_3 والذي هو $2+a$ أن يساوي 0 *

* وأما الـ constant ، $-4+b$ يجب أن لا يساوي 0 *

$$2+a=0 \wedge -4+b \neq 0 \Rightarrow a=-2 \wedge b \neq 4$$

② Cramers Rule

Matrix A الـ

$$\boxed{A}X = \boxed{B}$$

Matrix B الـ

$$X_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

*أقوم بإستبدال الـcolumn ذو الرقم i في الـMatrix A
بالـ Matrix B*

$$A_i = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & b_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & b_{21} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n1} & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

i^Acolumn

ex $2X_1 + 3X_2 = -1$

$2X - X_2 = 3$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

ذهبنا إلى الـ column ذو الرقم 1 في A واستبدلناه بـ B

$$X_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1-9}{-2-6} = 1$$

ذهبنا إلى الـ column ذو الرقم 2 في A واستبدلناه بـ B

$$X_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6+2}{-2-6} = -1$$

If $A^2 = A$, Find $\det A$
If A has Inverse.

سؤال ما إلو دخل بالطابق كامل بس إجا على بال الدكتورة 😐

$$A^2 = A$$

$\det A^2 = \det A \Rightarrow (\det A)^2 = \det A$

$(\det A)^2 - \det A = 0 \Rightarrow \det A(\det A - 1) = 0$

$\det A = 0$, $\det A = 1$, but A has Inverse so, $\det A = 1$

ex

$$x_1 + x_2 - x_3 = 9$$
$$+8x_2 + 6x_3 = -6$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 40$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Find the value of x_1 using Cramers Rule

*جبنا ذي الـ column رقم 1 في A

واستبدلناه بـ B*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} \overset{+}{9} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-1} \\ -6 & 8 & 6 \\ 40 & 4 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} {}^{+}1 & 1 & -1 \\ {}^{-}0 & 8 & 6 \\ {}^{+}-2 & 4 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{9\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 40 & -6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 40 & 4 \end{vmatrix}}{1\begin{vmatrix} \textcircled{2} & 6 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-648 + 204 + 344}{-72 - 28} = \frac{-100}{-100} = 1$$

eigen values and eigen vectors

$$A\overset{\text{eigen value}}{}X = \lambda X$$

λ → eigen value

λ → scalar

X → if $X \neq 0$

n×n Matrix

$$AX - \lambda X = 0$$

scalar

* لإخراج X عامل مشترك علي ضرب λ بـ I لها نفس order الـ A لكي تصبح عملية الطرح صحيحة *

$$(A - \lambda I)X = 0 \Rightarrow X \neq 0 \Rightarrow X \text{ is eigen vector}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

---

ex find eigen values and eigen vectors for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

لاحظ أن القطر هو من ضرب بـ λ وذلك لأن الـ I تملك في القطر 1 والباقي فيها 0

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0$$

$$-1 - \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \quad , \quad \boxed{\lambda = \mp 2} \text{ eigen values}$$

$\boxed{X^{(2)}}$ ⇒ أول eigen vector لـ

ليس أس

تعني الـ eigen vector لـ 2

* بتعويض 2 في λ *

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* بإرجاعها إلى شكل معادلات *

$$-1x_1 + 1x_2 = 0$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0$$

* لاحظ أن المعادلة الأولى هي نفس المعادلة الثانية *

* إختر واحدة من هذه المعادلات *

* سنختار الأولى *

$$x_2 = x_1$$

$$\text{Let } x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \Rightarrow X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* ضع القيمة التي تريدها نحن باستثناء الـ 0 لأنه سينتج عن ذلك vector 0 * $X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ch 4 Systems

* في هذا الشابتر سنقوم بحل system بحيث لكنه سيحتوي على مشتقة و سنستخدم في الحل الـ eigen values و الـ eigen vectors *

ex Solve Find the sol

$$\boxed{\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 \end{aligned}} \Rightarrow$$

* لاحظ أن هذا الـ system of eq. يحتوي على مشتقة * y_1' ، y_2'

* بتحويله إلى * Matrix

* الـ Matrix A *

$$y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

* كل شغلنا على هذه الـ Matrix *

[1] eigen values

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 2$$

[2] eigen vectors

$$X^{(2)} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = x_1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(-2)} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = -3x_1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -3 \Rightarrow X^{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$X^{(-2)} \Longrightarrow$ الـ eigen vector الثاني

$$\begin{bmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 = -3x_1$$

Let $x_1 = 1$

$x_2 = -3 \Rightarrow$

$$X^{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ch.7 Done

[3] $y_h = C_1 e^{\lambda_1 t} X^{(\lambda_1)} + C_2 e^{\lambda_2 t} X^{(\lambda_2)}$

* لن نستخدم هذه الصيغة للحصول على y_h في هذا التشابتر

& في حالة كانت قيم different λ

$y_h = C_1 e^{2t} X^{(2)} + C_2 e^{-2t} X^{(-2)}$

$$y_h = C_1 \underbrace{e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}}_{y_2}$$

أما إذا كانت repeated فهناك صيغة أخرى *

* لاحظ أن هذا الحل هو y_h أي أنه الحل للـ homo system

فلو كان الـ system of eq. لدي يحتوي على pure function of t

فأحتاج أولاً الحصول على y_h ثم على y_p *

Solve

$$y' = \begin{bmatrix}4 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\vec{y} \Rightarrow \begin{bmatrix}y_1'\\y_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

* نقصد بها *

* لكن سنستخدم هذا الشكل في الأمثلة القادمة *

* إذاً *

$$y' = A\vec{y} + G(t)$$

* لاحظ أنه إذا كانت $G(t) = 0 \Leftarrow$ homo

وإذا كانت $G(t) \neq 0 \Leftarrow$ non-homo *

* لاحظ أن هذا المثال الـ $G(t)$ فيه تساوي 0

إذاً الـ system homo والحل سيكون y_h *

---

[1] eigen values

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\-1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda = 3, 3$$

* لاحظ أن قيم λ التي ظهرت

* repeated

[2] eigen vectors

$$X^{(3)} \Rightarrow \begin{bmatrix}4-3 & 1\\-1 & 2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

* حصلنا على الـ eigen vector المرتبط بـ 3 الأولى

وللحصول على الـ eigen vector المرتبط بـ 3 الثانية سنستخدم طريقة ثانية لأنها repeated *

$$(A-\lambda I)\vec{V} = \overset{(3)}{X}$$

$$(A-\lambda I)\vec{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 + V_2 = 1$$

$$V_2 = 1 - V_1$$

$V_1 = 0 \implies$ * لا بأس هنا باختيار الـ 0 لأن عند التعويض بـ V_1 لن ينتج 0 vector *

$$V_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 1-V_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda t}\overset{(\lambda)}{X} + C_2 e^{\lambda t}\left(\overset{(\lambda)}{X} t + \vec{V}\right)$$

$$y_h = C_1 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

* هذه الصيغة في حال كانت قيم repeated λ *

Solve $y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\vec{y}$

$\boxed{1}$ eigen values

$$|A-\lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

complex $\boxed{\lambda = -1 \mp i}$

$\boxed{2}$ eigen vectors

$$\overset{(-1-i)}{X} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1-(-1-i) & 1 \\ -1 & -1-(-1-i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$iX_1 + X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = -iX_1$$

$$X_1 = 1 \Rightarrow \overset{(-1-i)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$X_2 = -i$$

$$\overset{(-1+i)}{X} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1-(-1+i) & 1 \\ -1 & -1-(-1+i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -iX_1 + X_2 = 0$$

$$X_2 = iX_1$$

$$X_1 = 1 \Rightarrow X_2 = i \Rightarrow \overset{(-1+i)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

* بما أن القيم لـ λ complex فإن الـ eigen vector الثاني هو نفسه الأول لكن معامل i ضرب بـ -1 *

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 t}\overset{(\lambda_1)}{X} + C_2 e^{\lambda_2 t}\overset{(\lambda_2)}{X}$$

* بما أن قيم λ different فسنستخدم هذه الصيغة *

$$y_h = C_1 e^{(-1-i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + C_2 e^{(-1+i)t}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Solve

13

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}$$

[1] eigen values

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 + 4 = 0$$

$$1 - \lambda = \mp 2i$$

$$\lambda = -1 \mp 2i$$

[2] eigen vectors

$$\overset{(1+2i)}{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-(1+2i) & 2 \\ -2 & 1-(1+2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2i x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_2 = i x_1$$

Let $x_1 = 1$
$x_2 = i$

$$\overset{(1+2i)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\overset{(1-2i)}{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-(1-2i) & 2 \\ -2 & 1-(1-2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2i x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_2 = -i x_1$$

Let $x_1 = 1$
$x_2 = -i$

$$\overset{(1-2i)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} \overset{\lambda_1}{X} + c_2 e^{\lambda_2 t} \overset{\lambda_2}{X}$$

$$y_h = c_1 e^{(1+2i)t} \overset{(1+2i)}{X} + c_2 e^{(1-2i)t} \overset{(1-2i)}{X}$$

$$y_h = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

* لاحظ أن الـ eigen vector الأول $\overset{(1+2i)}{X}$ يساوي $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ والـ eigen vector الثاني $\overset{(1-2i)}{X}$ يساوي $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ لاحظ أن الفرق الوحيد هو أن معامل i ضرب دا -1 *

Non homo system

* تعلمنا سابقاً كيف نحصل على الحل عندما يكون الـ $G(t) = 0$ أي أن الـ system homo لكن الآن سيكون الـ $G(t) \neq 0$ أي أن الـ system non-homo *

① Method of undetermined Coefficients

ex find the general sol. of the following sys.

$$y_1' = 2y_1 - 4y_2 + 2t^2 + 10t$$

$$y_2' = y_1 - 3y_2 + t^2 + 9t + 3$$

* بما أن هناك pure function of t فإن هذا الـ system of eq. * non-homo

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2t^2 + 10t \\ t^2 + 9t + 3 \end{bmatrix}}_{*G(t)*}$$

* لذا الحل سيكون بالحصول على y_h أولاً عن طريق حل الـ system وكأنه homo ثم الحصول على y_p عن طريق الـ UN. Coeff *

[I] y_h

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = 0$$

$$-6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \ \lambda = -2$$

$$\overset{(1)}{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & -4 \\ 1 & -3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2$$

Let $x_2 = 1$ $\quad \overset{(1)}{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = 4$

$$\overset{(-2)}{X} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+2 & -4 \\ 1 & -3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Let $x_2 = 1$ $\quad \overset{(-2)}{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = 1$

$$y_h = C_1 e^{t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ $G(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

* كتبنا ال G(t) على صورة مجزأة حيث وضعنا كل من معاملات t^2 ومعاملات t وال constant في * column vector

* وبما أن ال G(t) poly من الدرجة الثانية فإن ال yp سيكون من نفس جنسه، poly من الدرجة الثانية لكن المعاملات ستكون * column vector

* معامل t^2 هو $\vec{A}$ ومعامل t هو $\vec{B}$ ولدينا ال constant وهو $\vec{C}$ *

$$y_p = \vec{A} t^2 + \vec{B} t + \vec{C} \Rightarrow \vec{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$y_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow y_p = \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} a_1 t^2 \\ a_2 t^2 \end{bmatrix}} + \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} b_1 t \\ b_2 t \end{bmatrix}} + \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

* لاحظ أن لهم نفس ال order إذاً يمكنني جمعهم *

$$y_p = \underset{2\times1}{\begin{bmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \rightarrow * y_1 * \\ \rightarrow * y_2 * \end{matrix}$$

$$y_p' = 2\vec{A} t + \vec{B} \Rightarrow 2\vec{A} t + \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{A} t + \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t^2 + b_1 t + c_1 \\ a_2 t^2 + b_2 t + c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2(a_1 t^2 + b_1 t + c_1) - 4(a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \\ (a_1 t^2 + b_1 + c_1) - 3(a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \end{bmatrix}}_{\text{* يجب تبسيطها ثم تجزئتها *}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 - 4a_2 \\ a_1 - 3a_2 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 2b_1 - 4b_2 \\ b_1 - 3b_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2c_1 - 4c_2 \\ c_1 - 3c_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

* t^2 معاملات *

$2a_1 - 4a_2 + 2 = 0$

$a_1 - 3a_2 + 1 = 0$

$2a_1 - 4a_2 + 2 = 0$

$-2a_1 + 6a_2 - 2 = 0$

$2a_2 = 0$

$a_2 = 0 \Rightarrow 2a_1 + 2 = 0$

$a_1 = -1$

$\vec{A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

* t معاملات *

$2b_1 - 4b_2 + 10 = 2\overset{-1}{\cancel{a_1}}$

$b_1 - 3b_2 + 9 = 2\overset{0}{\cancel{a_2}}$

$2b_1 - 4b_2 + 10 = -2$

$-2b_1 + 6b_2 - 18 = 0$

$2b_2 = 6$

$b_2 = 3 \Rightarrow 2b_1 - 4(3) + 10 = -2$

$2b_1 - 12 + 10 = -2$

$2b_1 - 2 = -2$

$b_1 = 0$

$\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

* constant ال *

$2c_1 - 4c_2 + \cancel{0} = \overset{0}{\cancel{b_1}}$

$c_1 - 3c_2 + \cancel{3} = \overset{3}{\cancel{b_2}}$

$2c_1 - 4c_2 = 0$

$-2c_1 + 6c_2 = 0$

$2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y_p = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y_g = y_h + y_p$

Solve Find the form of y_p

14

$$y' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{y} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$\boxed{1}$ y_h

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$-3-\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -4$$

$$-3-\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -2$$

$$X^{(-4)} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = -x_1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$$X^{(-4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(-2)} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0$$

$x_2 = x_1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$$X^{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_h = C_1 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_p = \vec{u} e^{-2t} t + \vec{v} e^{-2t}$$

* بما أن ال G(t) e^{-2t} فإن ال y_p سيكون من جنسه لكن مضروب بـ $\vec{u}$ أي $\vec{u} e^{-2t}$ لكن لاحظ أنه مكرر في ال y_h لذا يتحتم علي أن أضربه بـ t ثم أجمع له * $\vec{v} e^{-2t}$

---

② Variation of parameters

Solve

$$y' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}}_{\to G(t)}$$

$\boxed{1}$ y_h

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = -4, -2$$

$$X^{(-4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X^{(-2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_h = C_1 \underbrace{e^{-4t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{y_2}$$

$\boxed{2}$ $$Y = [y_1 \; y_2]$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{-2t} \\ -e^{-4t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{e^{-6t} + e^{-6t}} \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{2e^{-6t}} \begin{bmatrix} e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ $$u' = Y^{-1} G(t)$$

$$u' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{4t} \\ e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$u' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6e^{2t} - 2e^{2t} \\ -6e^{0} + 2e^{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8e^{2t} \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$u' = \begin{bmatrix} -4e^{2t} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ $$u = \int_0^t u' \, ds = \int_0^t \begin{bmatrix} -4e^{2s} \\ -2 \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^t -4e^{2s} \, ds \\ \int_0^t -2 \, ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[-2e^{2s}\right]_0^t \\ \left[-2s\right]_0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 2 \\ -2t \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ $$y_p = Y u = \begin{bmatrix} e^{-4t} & e^{-2t} \\ -e^{-4t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 2 \\ -2t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 2e^{-4t} - 2te^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-4t} - 2te^{-2t} \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$ $$y_g = y_h + y_p$$

ex solve:

15

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}$$

*سؤال سنوات وحله كالتالي:- *

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$y_h = c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ch.4 Done

Ch.5 Series

مراجعة لـ Calculus 2

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

[2] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$$\Longrightarrow a_n = b_n \ \forall_n$$

تقرأ for all n

[3] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0$

$$\Longrightarrow a_n = 0 \quad \forall_n$$

[4] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ Taylor

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x_0 = 0$ Maclurine

ex write

مهم

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

interms of $(x-x_0)^n$

Replace n by n+2

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2+1)(n+2+2) a_{n+2} (x-x_0)^{n+2-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+4) a_{n+2} (x-x_0)^n$$

*في هذا التشابتر الحل سيكون إما باستخدام الـ power series sol. أو باستخدام الـ Frobenius Method *

ex write

مهم

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

interms of x^{n+r}

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+1}$$

* وجب إدخال x^2 إلى الـ series أولاً *

Replace n by n-1

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+r-1) a_{n-1} x^{n+r}$$

* Calculus 2 تكملة مراجعة *

[1] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n < \infty$

$\Rightarrow$ Conv.

[2] $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n| < \infty$

$\Rightarrow$ abs. Conv.

[3] $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-x_0)^n| < \infty$

$\Rightarrow$ abs. Conv. $\Rightarrow$ Conv.

[4] If $f^{(n)}(x)$ exist

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ Taylor $x_0 \neq 0$

[5] $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ Maclurine $x_0 = 0$

Classification of singularities

$$a(x) y'' + b(x) y' + c(x) y = 0$$

If $a(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ is ordinary point.

$a(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0$ is singular point.

* لكن بشرط أن لا تقوم هذه النقطة بتصفير كل المعادلة فإذا قامت بذلك فإنها لا تعتبر singular point *

ex $x(x^2-1) y'' + 2x y' + x y = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$x = -1, 0, 1 \Longrightarrow x = -1, 1$ are singular

why?! * لاحظ أن الصفر عند تعويضه بالمعادلة يقوم بتصفيرها *

ex $x^2(x-1)y'' + x\sin x\, y' + y = 0$

$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

$x = 0, 1$ are singular

power series sol.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

ex Find the power series sol.

$y'' + y = 0$ about $x_0 = 0$

$\boxed{1}$ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\underset{0}{x_0})^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-\underset{0}{x_0})^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-\underset{0}{x_0})^{n-2}$$

* إذا كتبت هذه المعادلات بشكل صحيح فستحصل على جزء من علامة السؤال *

* والآن بالتعويض في المعادلة سينتج :- *

$\boxed{2}$ $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

* يجب توحيد جميع الـ powers لكافة الـ X لجعلها تساوي n *

$$\underset{\boxed{n=0}}{\overset{\infty}{\sum}} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \underset{\boxed{n=0}}{\overset{\infty}{\sum}} a_n x^n = 0$$

* we Replaced all n by n+2

* لاحظ أن الـ counters متساوية

إذاً يمكنني كتابة المعادلة بـ $\sum_{n=0}^{\infty}$ واحدة *

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n}_{\text{recurrence relation}}\right) x^n = 0$$

* بقارن معامل x^n من اليسار مع معامل x^n من اليمين *

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

$$a_0 \neq 0 \,,\; a_1 \neq 0$$

* وهنا لأن باقي الـ series تعتمد عليهما *

* وذلك لأن الـ Counter يبدأ من 0 *

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \,,\quad \boxed{n \geq 0}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{(2)(1)} \qquad n=0$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{(3)(2)} \qquad n=1$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{(4)(3)} = \frac{-\frac{-a_0}{(2)(1)}}{(4)(3)} \qquad n=2$$

$$a_4 = \frac{a_0}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{a_0}{4!}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{(5)(4)} = \frac{-\frac{-a_1}{(3)(2)}}{(5)(4)} \qquad n=3$$

$$a_5 = \frac{-a_1}{(5)(4)(3)(2)(1)} = \frac{-a_1}{5!}$$

* وفي الإمتحان يكفي أن تصل إلى الخط فقط *

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x \; a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= a_0 + a_1 x + \frac{-a_0}{2!}x^2 + \frac{-a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{-a_1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= a_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right] \rightarrow a_0 \cos x$$

$$+$$

$$+ a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right] \rightarrow a_1 \sin x$$

ex Solve

16

$y'' + x^2 y = 0$

about $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

* بإدخال x^2 أولاً *

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

* بتوحيد الـ powers *

$$\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{\boxed{n=2}}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

لاحظ أن الـ counters لهذه الـ series ليست موحدة لذلك لن أستطيع كتابة المعادلة بـ $\sum_{n=2}^{\infty}$ واحدة

يمكنني توحيد الـ counters بإخراج الحد $n=0$ والحد $n=1$ من هذه الـ series ⇐ $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$ بحكم أنني أستطيع أخذ حدود من الـ series لكي تصبح تبدأ من 2

$$\underbrace{(0+2)(0+1) a_{0+2} x^0}_{\text{*حد نتج من تعويض 0 في n*}} + \underbrace{(1+2)(1+1) a_{1+2} x^1}_{\text{*حد نتج من تعويض 1 في n*}}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-2}\right) x^n = 0$$

$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$

$a_0 \neq 0 \quad , \quad a_1 \neq 0$

$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_{n-2} = 0$

$$a_{n+2} = \frac{-a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad n \geq 2 \;,\; a_4 = -\frac{a_0}{(4)(3)} \; n=2 , a_5 = -\frac{a_1}{(5)(4)} \; n=3$$

ex $y''-xy=0$ about $x_0=1 \Longrightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$, $y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$

$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} \xrightarrow[\text{بالمعادلة *}]{\text{* بالتعويض}} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0$

$=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - ((x-1)+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}$

$-(x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}$

$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$

$=2a_2-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0$

$=2a_2-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n - a_{n-1}-a_n\right)(x-1)^n = 0$

$a_0 \neq 0,\ a_1 \neq 0$

$2a_2-a_0=0$

$a_2=\frac{a_0}{2}$

$(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}-a_n=0$

$a_{n+2}=\frac{a_{n-1}+a_n}{(n+2)(n+1)}$ $n \geq 1$

$a_3=\frac{a_0+a_1}{(3)(2)}$

$a_4=\frac{a_1+a_2}{(4)(3)}$

ex Solve $(x^2+1)y'' + 6xy' + 6y = 0$ about $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, , \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \, , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$(x^2+1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$+ 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 6n a_n x^n + 6a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 6 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}+6na_n+6a_n\right)x^n$$

$$+(2a_2+6a_0)+(6a_3+6a_1+6a_1)x=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}+6na_n+6a_n\right)x^n+(2a_2+6a_0)$$

$$+(6a_3+12a_1)x=0$$

$$a_0\neq 0\ ,\quad a_1\neq 0$$

$$2a_2+6a_0=0$$

$$a_2=-3a_0$$

$$6a_3+12a_1=0$$

$$a_3=-2a_1$$

$$n(n-1)a_n+(n+2)(n+1)a_{n+2}+6na_n+6a_n=0$$

$$a_{n+2}=\frac{-(6n+6)a_n-n(n-1)a_n}{(n+2)(n+1)}\ ,\ n\geq 2$$

$$=\frac{(-6n-6-n^2-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$=\frac{-n^2-5n-6}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Frobenious Method

17

$$P(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

If $P(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ is sing. pt.

* إذا كانت x_0 singular point فإنها تُصنف إلى :- *

- reg. sing. pt
- irreg. sing. pt
  o.w

* إذا كانت الـ :-

$$\lim_{x \to x_0} \frac{q(x)}{p(x)}(x-x_0) = P_0 < \infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{p(x)}(x-x_0)^2 = q_0 < \infty$$

* إذا تحقق كلا الشرطين فإن :- *

x_0 is reg . sing. pt

Indicial eq.

$$r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0$$

* سيشرح الغرض من هذه المعادلة لاحقاً *

ex Find all reg. sing. pts.

① $2x(x-2)^2 y'' + 3x y' + (x-2)y = 0$

$$2x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{2x(x-2)^2} x = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{2(x-2)^2}$$

$$= \frac{3(0)}{2(0-2)^2} = \frac{0}{8} = 0 = P_0 < \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x-2)}{2x(x-2)^2} x^2 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2(x-2)}$$

$$= \frac{0}{2(0-2)} = \frac{0}{-4} = 0 = q_0 < \infty$$

$\Longrightarrow x_0 = 0$ is reg. sing. pt

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x}{2x(x-2)^2}(x-2)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3}{2(x-2)} = \infty$$

بما أن الناتج ∞

فلا داعي لحساب

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{2x(x-2)^2}(x-2)^2 =$$

$\Rightarrow x_0 = 2$ is irreg.sing.pt

② $(x-\frac{\pi}{2})^2 y'' + \cos x\, y' + \sin x\, y = 0$

$$(x-\frac{\pi}{2})^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}(x-\frac{\pi}{2})$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = -1 = P_0 < \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(x-\frac{\pi}{2})^2}(x-\frac{\pi}{2})^2 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 = q_0 < \infty$$

$\Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$ is reg.sing.pt

③ $x^2(1-x^2)y'' + \frac{2}{x}y' + 4y = 0$

$$x^2(1-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x}}{x^2(1-x^2)} x = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4}{x^2(1-x^2)} x^2 =$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ is irreg.sing.pt

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{x}}{x^2(1-x^2)}(x-1) = \lim_{x \to 1} \frac{-2}{x^3(1+x)} = -1 = P_0 < \infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{4}{x^2(1-x^2)}(x-1)^2 = \lim_{x \to 1} \frac{-4(x-1)}{x^2(1+x)} = 0 = q_0 < \infty$$

$\Rightarrow x_0 = 1$ is reg.sing.pt

$$\lim_{x \to -1} \frac{\frac{2}{x}}{x^2(1-x^2)}(x+1) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{x^3(1-x)} = \frac{2}{(-1)^3(1--1)} = -1 = P_0 < \infty$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{4}{x^2(1-x^2)}(x+1)^2 = \lim_{x \to -1} \frac{4(x+1)}{x^2(1-x)} = \frac{4(-1+1)}{(-1)^2(1--1)} = 0 = q_0 < \infty$$

$\Rightarrow x_0 = -1$ is reg.sing.pt

practice

④ $\sin x\, y'' + x y' + 4y = 0$

$$x \in [0, \pi]$$

---

* إذا رجعت إلى الأمثلة السابقة في هذا الشابتر التي تم حلها بإستخدام الـ power series sol. ستلاحظ أن x_0 كانت دائماً ordinary point ولذلك إستخدمنا الـ power series sol. عند الحل أما إذا كانت الـ x_0 reg. sing. pt فإن الحل سيكون بإستخدام الـ Frobenious Method *

$$P(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad \cdots \textcircled{*}$$

Let x_0 be reg.sing.pt

then the sol. of ⊛ is

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r} = a_0(x-x_0)^r + a_1(x-x_0)^{1+r} + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n (x-x_0)^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n (x-x_0)^{n+r-2}$$

Let r_1, r_2 be the roots of indicial eq.

Case(1):- $r_1 = r_2 = r \Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}$

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r}$$

Case(2):- $r_1 - r_2 = \text{Integer} \Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}$

$$y_2 = a\, y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}$$

Case(3):- $r_1 - r_2 \neq \text{Integer} \Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r_1}$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^{n+r_2}$$

ex Consider the following O.D.E

$$2x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0$$

Find:

① All reg.sing.pts

$$2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x}{2x^2} x = \frac{-1}{2} = P_0 < \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{2x^2} x^2 = \frac{1}{2} = q_0 < \infty$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ is reg.sing.pt

② The indicial eq.

$$r(r-1) + P_0 r + q_0 = 0$$

$$r(r-1) - \frac{1}{2}r + \frac{1}{2} = 0$$

$$2r(r-1) - r + 1 = 0$$

$$2r^2 - 3r + 1 = 0$$

③ The roots of indicial eq.

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 = r_1 \\ \frac{1}{2} = r_2 \end{cases}$$

④ Solve O.D.E about $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + (x+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$2r(r-1)a_0 x^r - r a_0 x^r + a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(2(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r)a_n + a_{n-1} + a_n\right) x^{n+r} = 0$$

$$a_0 \neq 0$$

$$2r(r-1) - r + 1 = 0$$

لاحظ أنه لو أخذت الـ x^r و a_0 عامل مشترك فسيتكون لدينا :-

indicial eq.

$$2(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r)a_n + a_{n-1} + a_n = 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1} \quad n \geq 1$$

If $r = 1$ $\quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(n+1)(n) - (n+1) + 1}$

If $r = \frac{1}{2}$ $\quad a_n = \frac{-a_{n-1}}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2}) + 1}$

$$r_1 - r_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \text{Integer}$$

Case (3)

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+r_1}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

practice

18

~~C~~onsider the following O.D.E

$2x^2y'' + x(1-x)y' - y = 0$

Find:-

① Reg. sing. pts

② Inditial eq.

③ Solve about $x_0 = 0$

Ch.5 Done

Ch.6

Laplace Transform

$F(s) = L\, f(t)$

$= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad t \geq 0$

ex

$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\, dt \quad t \geq 0$

$= \frac{e^{-st}}{-s}\Big]_0^\infty = -\frac{1}{s}\left[e^{-\infty} - 1\right]$

$= \frac{1}{s}$

Linearity of laplace:-

$L\{a f(t) \mp b g(t)\}$

$= a L\{f(t)\} \mp b L\{g(t)\}$

Rules:-

$\boxed{1}\ L\{1\} = \frac{1}{s}$ $\quad \boxed{2}\ L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ← +ve integer

$\boxed{3}\ L\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

$\boxed{4}\ L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$

$\boxed{5}\ L\{\sin\alpha t\} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$

$\boxed{6}\ L\{\cos\alpha t\} = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

$\boxed{7}\ L\{e^{at} f(t)\}$

$= L\{f(t)\}\Big|_{s-a} = F(s-a)$

ex

$L\{t\} = \frac{1!}{s^{1+1}} = \frac{1!}{s^2}$

$L\{t^2\} = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2!}{s^3}$

$L\{t^3\} = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3!}{s^4}$

ex

$L\{e^{2t} t\} = \frac{1!}{s^2}\Big|_{s-2}$

$= \frac{1!}{(s-2)^2}$

$L\{e^{2t} t^2\} = \frac{2!}{s^3}\Big|_{s-2}$

$= \frac{2!}{(s-2)^3}$

$L\{e^{2t} t^3\} = \frac{3!}{s^4}\Big|_{s-2}$

$= \frac{3!}{(s-2)^4}$

ex

$L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$

$L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$

$L\{e^{2t}\sin 2t\} = \frac{2}{(s-2)^2+4}$

$L\{e^{-2t}\cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$

ex

$L\{\sinh \alpha t\} = L\left\{\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s+\alpha}\right)$

$= \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$

$L\{\cosh \alpha t\} = L\left\{\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{s+\alpha}\right)$

$= \frac{s}{s^2-\alpha^2}$

ex

$L\{e^{2t}\sinh 4t\}$

$= \frac{4}{(s-2)^2-16}$

$L\{e^{2t}\cosh 4t\}$

$= \frac{s-2}{(s-2)^2-16}$

ex Find:-

$\int_0^\infty e^{-st} t^{10}\, dt$

$L\{t^{10}\} = \frac{10!}{t^{11}}$

Inverse Transform

$L\{f(t)\} = F(s)$

$f(t) = L^{-1}F(s)$

ex

$\boxed{1}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

$\boxed{2}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

$\boxed{3}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

$= \frac{1}{2!}L^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} = \frac{1}{2!}t^2$

$\boxed{4}\ L^{-1}\left\{\frac{17}{s^4}\right\}$

$= \frac{17}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{17}{3!}t^3$

$\boxed{5}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$

$\boxed{6}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$

$\boxed{7}\ L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$

$= \sin 2t$

$\boxed{8}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$

$\boxed{9}\ L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9}\right\}$

$= 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$

$= 2\cos 3t$

$\boxed{10}\ L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-s-2}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{A}{s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{B}{s+1}\right\}$

$\frac{A(s+1) + B(s-2)}{(s-2)(s+1)} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$

$\begin{matrix} A+B=1 \\ A-2B=-1 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{matrix}$

$\frac{1}{3}L^{-1}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{3}L^{-1}\frac{1}{s+1}$

$= \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$

ex

$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+1}\right\} = \overset{\to \cos t}{\boxed{L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}}} + \overset{\to \sin t}{\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}}}$

$L^{-1}F(s-a) = e^{at}L^{-1}F(s) = e^{at}f(t)$

ex

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = e^{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = e^{t}t$

$L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^2+16}\right\} = e^{3t}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+16}\right\}$

$= \frac{e^{3t}}{2}L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} = \frac{e^{3t}}{2}\sin 4t$

$L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+16}\right\} = e^{t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = e^{t}\cos 4t$

$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)^2+16}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s-1)+1}{(s-1)^2+16}\right\}$

$= L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+16}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+16}\right\}$

$= e^{t}L^{-1}\frac{s}{s^2+16} + \frac{e^{t}}{4}L^{-1}\frac{4}{s^2+16}$

$= e^{t}\cos 4t + \frac{e^{t}}{4}\sin 4t$

ex

① $L^{-1}\frac{s-1}{(s-1)^2+16}=e^{t}\cos 4t$

② $L^{-1}\frac{s}{(s-2)^2+9}$

$=L^{-1}\frac{s-2}{(s-2)^2+9}+L^{-1}\frac{2}{(s-2)^2+9}$

$=L^{-1}\frac{s-2}{(s-2)^2+9}+\frac{2}{3}L^{-1}\frac{3}{(s-2)^2+9}$

$=e^{2t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t$

③ $L^{-1}\frac{s+4}{s^2+2s+2}=L^{-1}\frac{s+4}{(s^2+2s+1)+1}$

$=L^{-1}\frac{s+4}{(s+1)^2+1}=L^{-1}\frac{s+1+3}{(s+1)^2+1}$

$=L^{-1}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+L^{-1}\frac{3}{(s+1)^2+1}$

$=L^{-1}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+3L^{-1}\frac{1}{(s+1)^2+1}$

$=e^{-t}L^{-1}\frac{s}{s^2+1}+3e^{-t}L^{-1}\frac{1}{s^2+1}$

$=e^{-t}\cos t+3e^{-t}\sin t$

④ $L^{-1}\frac{s-5}{(s-1)^2+4}=L^{-1}\frac{(s-1)-4}{(s-1)^2+4}$

$=L^{-1}\frac{(s-1)}{(s-1)^2+4}-2L^{-1}\frac{2}{(s-1)^2+4}$

$=e^{t}\cos 4t-2e^{t}\sin 2t$

ex

$L^{-1}\left\{\frac{7}{(s-5)^6}+\frac{s-1}{s^2+9}+\frac{s-1}{(s-1)^2-9}\right\}$

$=\frac{7}{5!}L^{-1}\frac{5!}{(s-5)^6}+L^{-1}\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{3}L^{-1}\frac{3}{s^2+9}$

$+L^{-1}\frac{s-1}{(s-1)^2-9}$

$=\frac{7}{5!}e^{5t}t^{5}+\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t$

$+e^{t}\cosh 3t$

Laplace Transform of derivative

$L\{f'(t)\}=s\boxed{F(s)}-f(0)$

$L\{f''(t)\}=s^2\boxed{F(s)}-sf(0)-f'(0)$

$\rightarrow L f(t)$

ex

$L\{t\sin t\}$

$f(t)=t\sin t$, $f(0)=0$

$f'(t)=t\cos t+\sin t$, $f'(0)=0$

$f''(t)=-t\sin t+\cos t+\cos t$

$f''(t)=-t\sin t+2\cos t$

$Lf''(t)=-Lt\sin t+2L\cos t$

$s^2Lf(t)-\overset{0}{\cancel{sf(0)}}-\overset{0}{\cancel{f'(0)}}$

$=-Lt\sin t+2L\cos t$

$s^2Lt\sin t=-Lt\sin t+2L\cos t$

$(s^2+1)Lt\sin t=2\frac{s}{s^2+1}$

$Lt\sin t=\frac{2s}{(s^2+1)^2}$

ex

$Lt\cos t$

$f(t)=t\cos t$, $f(0)=0$

$f'(t)=-t\sin t+\cos t$, $f'(0)=1$

$f''(t)=-t\cos t-\sin t-\sin t$

$=-t\cos t-2\sin t$

$$Lf''(t) = L\{-t\cos t - 2\sin t\}$$

$$s^2Lf(t) - s\overset{0}{\cancel{f(0)}} - \overset{1}{\cancel{f'(0)}} \quad f(t)$$

$$= -L\{t\cos t\} - 2L\sin t$$

$$s^2Lf(t) + Lf(t) = -2\frac{1}{s^2+1} + 1$$

$$(s^2+1)Lf(t) = \frac{-2}{s^2+1} + 1$$

$$Lf(t) = \left(\frac{-2}{s^2+1} + 1\right)\frac{1}{s^2+1}$$

Laplace Transform of Integral

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) = \frac{1}{s}Lf(t)$$

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}$$

ex

$$L\int_0^t \sin\tau\,d\tau = \frac{L\sin t}{s} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

ex

$$L^{-1}\frac{1}{s(s^2+1)} = \int_0^t L^{-1}\frac{1}{s^2+1}\Big|_\tau d\tau = -\cos t - 1$$

ex

$$L^{-1}\frac{1}{s(s^2+w^2)} = \int_0^t L^{-1}\frac{1}{s^2+w^2}\Big|_\tau d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{1}{w}\sin w\tau\,d\tau = \frac{-1}{w^2}\cos w\tau\Big]_0^t$$

$$= \frac{-1}{w^2}(\cos wt - 1) = \frac{1-\cos wt}{w^2}$$

ex

$$L^{-1}\frac{1}{s^2(s^2+w^2)} = \int_0^t L^{-1}\frac{1}{s(s^2+w^2)}\Big|_\tau d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{1-\cos w\tau}{w^2}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{w^2}\left(\tau - \frac{\sin w\tau}{w}\right)\Big]_0^t = \frac{wt-\sin wt}{w^3}$$

ex

$$L\cos^2 t$$

$$f(t) = \cos^2 t \qquad f(0) = 1$$

$$f'(t) = 2\cos t\sin t = \sin 2t$$

$$Lf'(t) = L\sin 2t$$

$$sLf(t) - \overset{1}{\cancel{f(0)}} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Lf(t) = \left(\frac{2}{s^2+4} + 1\right)\frac{1}{s}$$

ex

$$L^{-1}\frac{3}{(s^2+\frac{s}{4})} = L^{-1}\frac{3}{s(s+\frac{1}{4})}$$

$$= \int_0^t L^{-1}\frac{3}{s+\frac{1}{4}}\Big|_\tau d\tau$$

$$= \int_0^t 3e^{-\frac{1}{4}\tau}\,d\tau = 12(1-e^{-\frac{1}{4}t})$$

ex

$$L^{-1}\frac{s+1}{s^4+9s^2} = L^{-1}\frac{s+1}{s^2(s^2+9)}$$

$$= \int_0^t L^{-1}\frac{s+1}{s(s^2+9)}\Big|_\tau d\tau$$

$$L^{-1}\frac{s+1}{s(s^2+9)} = \int_0^t L^{-1}\frac{s+1}{s^2+9}\Big|_\tau d\tau$$

$$L^{-1}\frac{s}{s^2+9} + L^{-1}\frac{1}{s^2+9}$$

ex

20

$y''-y=t \quad y(0)=1$

$y'(0)=1$

$Ly''-Ly=Lt$

$s^2Ly-sy(0)-y'(0)-Ly=Lt$

$(s^2-1)Ly-s-1=\frac{1}{s^2}$

$Ly=\left(\frac{1}{s^2}+s+1\right)\frac{1}{s^2-1}$

$Ly=\frac{1}{s^2(s^2-1)}+\frac{s}{s^2-1}+\frac{1}{s^2-1}$

$y=\boxed{L^{-1}\frac{1}{s^2(s^2-1)}}+L^{-1}\frac{s}{s^2-1}+L^{-1}\frac{1}{s^2-1}$

$y=\sinh t-t+\cosh t+\sinh t$

$y=2\sinh t+\cosh t-t$

$L^{-1}\frac{1}{s^2(s^2-1)}=\int_0^t \boxed{L^{-1}\frac{1}{s(s^2-1)}}\Big|_\tau d\tau$

$\int_0^t L^{-1}\frac{1}{s^2-1}\Big|_\tau d\tau=\int_0^t \sinh\tau\, d\tau=\cosh t-1$

$L^{-1}\frac{1}{s^2(s^2-1)}=\int_0^t (\cosh t-1)\Big|_\tau d\tau$

$=\sinh t-t$

ex

$y''-y'-2y=0 \quad y(0)=1$

$y'(0)=0$

$Ly''-Ly'-2Ly=0$

$s^2Ly-sy(0)-\overset{0}{\cancel{y'(0)}}$

$-(sLy-y(0))-2Ly=0$

$(s^2-s-2)Ly-s+1=0$

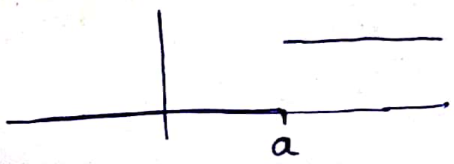
$Ly=\frac{s-1}{s^2-s-2}$

$y=L^{-1}\frac{Ⓐ}{s-2}+L^{-1}\frac{Ⓑ}{s+1}$

$=Ae^{2t}+Be^{-t}$

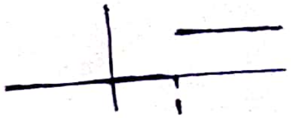
unit step function

$u(t-a)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$

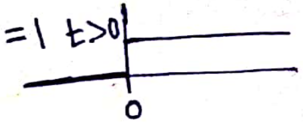


ex

$u(t-1)=\begin{cases}0 & t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$



$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ $=1 \quad t>0$



$L\{u(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\,dt$

$\cancel{\int_0^a e^{-st}\overset{0}{(0)}dt}+\int_a^\infty e^{-st}(1)\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_a^\infty$

$=\frac{e^{-as}}{s}$

ex

$Lu(t-3)=\frac{e^{-3s}}{s}$

$F(t)=f(t-a)u(t-a)$

$=f(t-a)\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}=\begin{cases}0 & t\ a\\ f(t-a) & t>a\end{cases}$

$Lf(t-a)u(t-a)=e^{-as}Lf(t)$

$=e^{-as}F(s)$

ex

$$L(t-1)^2 u(t-1)$$

$$= e^{-s} L t^2 = e^{-s} \frac{2!}{s^3}$$

$$= \frac{2! e^{-s}}{s^3}$$

$$L^{-1} e^{-as} F(s) = f(t-a)u(t-a)$$

ex

$$L^{-1} e^{-2s} \frac{1}{s^2+1} = \sin(t-2)\, u(t-2)$$

$$L f(t)u(t-a) = e^{-as} L f(t+a)$$

ex Find $L f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t < 1 \\ 5 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$f(t) = 2t(\overset{1}{\cancel{u(t-0)}} - u(t-1))$$
$$+ 5u(t-1)$$

$$= 2t - 2t\, u(t-1)$$
$$+ 5u(t-1)$$

$$L f(t) = 2Lt - 2L t u(t-1)$$
$$+ 5 L u(t-1)$$

$$= 2Lt - 2e^{-s} L t+1$$
$$+ 5 L u(t-1)$$

$$= 2 \frac{1!}{s^2} - 2e^{-s}\left(\frac{1!}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$
$$+ 5 \frac{e^{-s}}{s}$$

ex Find $L f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}t^2 & 1 < t < \frac{1}{2}\pi \\ \cos t & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(t) = 2(u(t-0) - u(t-1))$$
$$+ \frac{1}{2}t^2(u(t-1) - u(t-\tfrac{1}{2}\pi))$$
$$+ \cos t\, u(t - \tfrac{\pi}{2})$$

ex

$$L\, 2(\overset{1}{\cancel{u(t-0)}} - u(t-1))$$

$$= 2L1 - 2Lu(t-1)$$

$$= \frac{2}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s}$$

ex

$$L \frac{1}{2} t^2 (u(t-1) - u(t - \tfrac{1}{2}\pi))$$

$$= \frac{1}{2} L t^2 u(t-1) - \frac{1}{2} L t^2 u(t - \tfrac{1}{2}\pi)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-s} L(t+1)^2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\pi s} L(t + \tfrac{1}{2}\pi)^2$$

$$= \frac{1}{2} e^{-s} L\, t^2 + 2t + 1$$
$$- \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\pi s} L\, t^2 + \pi t + \frac{1}{4}\pi^2$$

$$= \frac{1}{2} e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3} + 2\frac{1!}{s^2} + \frac{1}{s}\right)$$
$$- \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\pi s}\left(\frac{2!}{s^3} + \pi\frac{1!}{s^2} + \frac{1}{4}\pi^2 \frac{1}{s}\right)$$

ex

$$L \cos t\, u(t - \tfrac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}s} L \cos(t + \tfrac{\pi}{2})$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}s} L \cos t\, \overset{0}{\cancel{\cos\tfrac{\pi}{2}}} - \sin t\, \overset{1}{\cancel{\sin\tfrac{\pi}{2}}}$$

$$= -e^{-\frac{\pi}{2}s} L \sin t = -e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{1}{s^2+1}$$

practice ~~Find~~ $L^{-1} F(s)$

$$\text{where } F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2} + \frac{e^{-3s}}{(s+2)^2}$$

21

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2}$

$$L^{-1} \frac{e^{-s}}{s^2+\pi^2} = u(t-1) L^{-1} \frac{1}{s^2+\pi^2}\Big|_{t-1}$$

$$= \frac{u(t-1)}{\pi} L^{-1} \frac{\pi}{s^2+\pi^2}\Big|_{t-1}$$

$$= \frac{u(t-1)}{\pi} \sin\pi(t-1)$$

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} \frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2}$

$$L^{-1} \frac{e^{-2s}}{s^2+\pi^2} = u(t-2) L^{-1} \frac{1}{s^2+\pi^2}\Big|_{t-2}$$

$$= \frac{u(t-2)}{\pi} L^{-1} \frac{\pi}{s^2+\pi^2}\Big|_{t-2}$$

$$= \frac{u(t-2)}{\pi} \sin\pi(t-2)$$

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} \frac{e^{-3s}}{(s+2)^2}$

$$L^{-1} \frac{e^{-3s}}{(s+2)^2} = u(t-3) L^{-1} \frac{1}{(s+2)^2}\Big|_{t-3}$$

$$= u(t-3)\, e^{-2(t-3)} (t-3)$$

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} 6 \frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+9}$

$$L^{-1} 6 \frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+9} = 6 L^{-1} \frac{1}{s^2+9} - 6 L^{-1} \frac{e^{-\pi s}}{s^2+9} = 2\sin 3t - 2u(t-\pi) L^{-1} \frac{3}{s^2+9}\Big|_{t-\pi}$$

$$= 2\sin 3t - 2u(t-\pi) \sin 3(t-\pi)$$

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} \frac{e^{-3s}}{s^4}$

$$L^{-1} \frac{e^{-3s}}{s^4} = \frac{u(t-3)}{3!} L^{-1} \frac{3!}{s^4}\Big|_{t-3} = \frac{u(t-3)}{3!} (t-3)^3$$

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} \frac{e^{-3s}}{s^2}$

$$L^{-1} \frac{e^{-3s}}{s^2} = u(t-3) L^{-1} \frac{1}{s^2}\Big|_{t-3} = u(t-3)(t-3)$$

$\underline{\underline{ex}}$ $L^{-1} \frac{s\, e^{-2s}}{s^2+4}$

$$L^{-1} \frac{s\, e^{-2s}}{s^2+4} = u(t-2) L^{-1} \frac{s}{s^2+4}\Big|_{t-2} = u(t-2) \cos 2(t-2)$$

Dirac's Delta Function

$\boxed{1}$ $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t=a \\ 0 & o.w \end{cases}$

$\boxed{2}$ $\int_0^\infty \delta(t-a)\, dt = 1$

$\boxed{3}$ $\int_0^\infty g(t)\, \delta(t-a)\, dt = g(a)$

$\boxed{4}$ $L\, \delta(t-a) = e^{-as}$

ex

$$y'' + 3y' + 2y = u(t-1) - u(t-2) \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=0$$

$$Ly'' + 3Ly' + 2Ly = Lu(t-1) - Lu(t-2)$$

$$s^2 Ly - \cancel{s\overset{0}{y(0)}} - \cancel{\overset{0}{y'(0)}} + 3(sLy - \cancel{\overset{0}{y(0)}})$$

$$+2Ly = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$(s^2+3s+2)Ly = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Ly = (e^{-s} - e^{-2s})\left(\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right)$$

$$= (e^{-s} - e^{-2s})\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}\right)$$

$$= e^{-s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}\right)$$
$$- e^{-2s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}\right)$$

$$y = L^{-1} e^{-s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}\right)$$

$$- L^{-1} e^{-2s}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}\right)$$

$$y = u(t-1)\left(A + Be^{-(t-1)} + Ce^{-2(t-1)}\right)$$
$$- u(t-2)\left(A + Be^{-(t-2)} + Ce^{-2(t-2)}\right)$$

---

ex

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-1) \qquad y(0)=0 \quad y'(0)=0$$

$$Ly'' + 3Ly' + 2Ly = L\delta(t-1)$$

$$s^2 Ly - \cancel{s\overset{0}{y(0)}} - \cancel{\overset{0}{y'(0)}} + 3(sLy - \cancel{\overset{0}{y(0)}}) + 2Ly = e^{-s}$$

$$(s^2+3s+2)Ly = e^{-s}$$

$$Ly = \frac{e^{-s}}{s^2+3s+2} = \frac{e^{-s}}{(s+1)(s+2)} = e^{-s}\left(\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}\right)$$

$$y = L^{-1} e^{-s}\left(\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}\right) = L^{-1}\frac{Ae^{-s}}{s+1} + L^{-1}\frac{Be^{-s}}{s+2}$$

$$= Au(t-1)\,e^{-(t-1)} + Bu(t-1)\,e^{-2(t-1)}$$

---

ex

$$\int_0^\infty t^3 \delta(t-2)\,dt = t^3\Big|_{t=2} = 8$$

ex

$$\int_0^\infty e^{-s} t^3\,dt = Lt^3 = \frac{3!}{s^4}$$

$$\int_0^\infty t^3 \delta(t-1)\,dt = t^3\Big|_{t=1} = 1$$

Differentiation Of Transform O.D.E

$\boxed{1}$ $F(s) = L f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$

$\boxed{2}$ $F'(s) = \frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty \frac{d e^{-st}}{ds} f(t)\, dt$

$F'(s) = \int_0^\infty -t e^{-st} f(t) dt$

$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\, dt$

$\boxed{3}$ $F'(s) = - L t f(t)$

$\boxed{4}$ $L^{-1} F'(s) = -t f(t) = -t L^{-1} F(s)$

$L f(t)$	$f(t)$
$\boxed{1}$ $\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t - \beta t \cos\beta t)$
$\boxed{2}$ $\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{t}{2\beta} \sin\beta t$
$\boxed{3}$ $\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta}(\sin\beta t + \beta t \cos\beta t)$

ex $L^{-1} \frac{s}{(s^2+\beta^2)^2}$

$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right)'$

$L^{-1}\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2} = -\frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right)'$

$= -\frac{1}{2}\left(-t L^{-1} \frac{1}{s^2+\beta^2}\right) = \frac{t}{2\beta} \sin\beta t$

ex $L^{-1} \frac{s}{(s^2+16)^2}$

$\frac{s}{(s^2+16)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+16}\right)'$

$L^{-1} \frac{s}{(s^2+16)^2} = -\frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+16}\right)'$

$L^{-1} \frac{s}{(s^2+16)^2} = -\frac{1}{2}\left(-t L^{-1} \frac{1}{s^2+16}\right)$

$L^{-1} \frac{s}{(s^2+16)^2} = \frac{t}{8} \sin 4t$

ex $L^{-1} \frac{s}{(s^2-4)^2}$

$\frac{s}{(s^2-4)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)'$

$L^{-1} \frac{s}{(s^2-4)^2} = -\frac{1}{2} L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)'$

$L^{-1} \frac{s}{(s^2-4)^2} = -\frac{1}{2}\left(-t L^{-1} \frac{1}{s^2-4}\right)$

$L^{-1} \frac{s}{(s^2-4)^2} = \frac{t}{4} \sinh 2t$

ex $L\, t \sin t$

$L t \sin t = -(L \sin t)' = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'$

$= -\frac{-2s}{(s^2+1)^2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

ex $L \frac{1}{2} t e^{-3t}$

$L \frac{1}{2} t e^{-3t} = \frac{-1}{2}(L e^{-3t})'$

$= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{s+3}\right)' = \frac{-1}{2} \frac{1}{(s+3)^2}$

ex $L\, t \cos wt$

$L t \cos wt = -(L \cos wt)'$

$= \left(\frac{s}{s^2+w^2}\right)' = \frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$

ex $L\, t^2 \cos wt$

$L t^2 \cos wt = (L t \cos wt)'$

$= \left(\frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}\right)' = -----$

ex $L^{-1} \ln\left(1+\frac{w^2}{s^2}\right)$

$F(s) = \ln 1 + \frac{w^2}{s^2} = \ln \frac{s^2+w^2}{s^2}$

$F(s) = \ln(s^2+w^2) - \ln s^2$

$F'(s) = \frac{2s}{s^2+w^2} - \frac{2}{s}$

$$= L^{-1} F'(s) = L^{-1}\frac{2s}{s^2+w^2} - L^{-1}\frac{2}{s}$$

$$-tf(t) = 2\cos wt - 2$$

$$f(t) = \frac{2-2\cos wt}{t}$$

ex $L^{-1} \ln \frac{s}{s-1}$

$$F(s) = \ln\frac{s}{s-1} = \ln s - \ln s-1$$

$$F'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

$$L^{-1}F'(s) = L^{-1}\frac{1}{s} - L^{-1}\frac{1}{s-1}$$

$$-tf(t) = 1 - e^{t}$$

$$f(t) = \frac{e^{t} - 1}{t}$$

ex $L^{-1}\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2}$

$$\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2} = -\left(\frac{1}{s^2+6s+10}\right)'$$

$$L^{-1}\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2} = -\left(-tL^{-1}\frac{1}{s^2+6s+10}\right)$$

$$L^{-1}\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2} = tL^{-1}\frac{1}{s^2+6s+10}$$

$$L^{-1}\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2} = tL^{-1}\frac{1}{s^2+6s+9+1}$$

$$L^{-1}\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2} = tL^{-1}\frac{1}{(s+3)^2+1}$$

$$L^{-1}\frac{2s+6}{(s^2+6s+10)^2} = te^{-3t}\sin t$$

ex $L^{-1}\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$

$$\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' = \frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{s^2+\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} - 2\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right)$$

$$L^{-1}\frac{s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = -\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' + \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\beta^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(-t\cos\beta t) + \frac{1}{2\beta}\sin\beta t$$

Integration of Transform O.D.E

$$L\frac{f(t)}{t} = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$$

$$\frac{f(t)}{t} = L^{-1}\int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$$

ex $L\frac{\sin t}{t}$

$$L\frac{\sin t}{t} = \int_s^\infty L\sin t\Big|_{\tilde{s}}\,d\tilde{s}$$

$$= \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\Big|_{\tilde{s}}\,d\tilde{s} = \int_s^\infty \frac{1}{\tilde{s}^2+1}\,d\tilde{s}$$

$$= \tan^{-1}\tilde{s}\Big]_s^\infty$$

$$= \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s$$

practice
Find $L^{-1}\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}$

23

Laguerre's Equation

ex **Solve**

$ty''+(1-t)y'+ny=0$

$L(ty')=-(Ly')'=-(s\underbrace{Ly}_{\to Y}-y(0))'$

$=Y-s\frac{dY}{ds}$

$L(ty'')=-(Ly'')'=-(s^2\underbrace{Ly}_{\to Y}-sy(0)-y'(0))'$

$=2sY-s^2\frac{dY}{ds}+y(0)$

$Lty''+L(1-t)y'+Lny=0$

$Lty''+Ly'-Lty'+nLy=0$

$2sY-s^2\frac{dY}{ds}+\cancel{y(0)}+sY-\cancel{y(0)}-Y+s\frac{dY}{ds}+nY=0$

$3sY-Y+nY-s^2\frac{dY}{ds}+s\frac{dY}{ds}=0$

$Y(3s-1+n)-\frac{dY}{ds}(s^2-s)=0$

$\frac{dY}{Y}=\frac{3s-1+n}{s^2-s}ds$

$\int\frac{dY}{Y}=\int\frac{3s-1+n}{s(s-1)}ds$

$\int\frac{dY}{Y}=\int\frac{3s-3+2+n}{s(s-1)}ds$

$\int\frac{dY}{Y}=3\int\frac{s-1}{s(s-1)}ds+(2+n)\int\frac{1}{s(s-1)}ds$

$\int\frac{dY}{Y}=3\int\frac{1}{s}ds+(2+n)\int\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}ds$

$\frac{A(s-1)+Bs}{s(s-1)}=\frac{1}{s(s-1)}$

$A+B=0$

$-A=1 \Rightarrow A=-1$

$B=1$

$\ln Y=3\ln s-(2+n)\ln s+(2+n)\ln s-1$

$Y=\frac{s^3(s-1)^{2+n}}{s^{2+n}}$ $\quad n=0 \Rightarrow Y=\frac{s^3(s-1)^2}{s^2}$

$n=1 \Rightarrow Y=\frac{s^3(s-1)^3}{s^3}$

المادة إنتهت 🙂